**Занятие № 1.**

**Тема: «Вводное занятие. Матрицы. Определители и их свойства».**

Матрицей размерности *m × n* называется прямоугольная таблица чисел или буквенных выражений, содержащая *m* строк и *n* столбцов:

,

 называют элементами матрицы.

Элементы  образуют *главную диагональ* матрицы.

Если все элементы матрицы, расположенные выше (ниже) главной диагонали, равны нулю, то матрицу называют верхней (нижней) *треугольной*:

 , .

Если все элементы матрицы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, то матрицу называют *диагональной*:

 .

Если в диагональной матрице все элементы главной диагонали равны единице, то матрицу называют *единичной*:

*E*= .

Если все элементы матрицы равны 0, то матрица называется *нулевой* и ее обозначают буквой O.

Две матрицы считаются равными, если они имеют одинаковый размер, и элементы, стоящие на пересечении строк и столбцов с одинаковыми номерами, равны, т.е.:

если *=bij*, *i = 1, ... , m ; j = 1, ... , n* , то *A = B* .

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, т.е. *m= n,* называется квадратной матрицей, а число *n* называется *порядком матрицы*:

A = .

Выпишем примеры квадратных матриц размерностью *2*×*2*:

, 

и *3*×*3*:

, *В*= 

**Сложение матриц**

Суммой матриц A и B одной и той же размерности *m×n* называется матрица C, каждый элемент которой представляет собой сумму соответствующих элементов матриц A и B:

*cij =+ bij, i=1,...,m; j=1,...,n.*

*i – номер строки, j – номер столбца*

*Матрицы разных размерностей складывать нельзя.*

**Пример 1**

 

**Свойства сложения матриц**

1. Коммутативность.

*А+В=В+А*

1. Ассоциативность.

*(A+B)+C=A+(B+C)*

**Умножение матрицы на число**

Чтобы умножить матрицу А на число *α,* необходимо все элементы  матрицы A умножить на число *α*:

*C=α·A; cij=α·; i=1,.....,m; j=1,.....,n*.

**Пример 2**

 ****

*Произведением* матрицы A=() размерности (*m × n*) на матрицу B=(bls) размерности (*n × k*) называется матрица C=(*cpt*) размерности (*m × k*), где:



*Произведение матриц существует только тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы*.

Произведение матриц *не коммутативно*, то есть *А·В ≠ В·А.*

Умножение матриц производится по принципу «строка на столбец»: элементы строки с номером *i* первой матрицы *покомпонентно* умножаются на элементы столбца с номером *j* второй матрицы, результаты складываются и сумма заносится в *i*-ю строку и *j*-й столбец матрицы-результата. Процесс производится до полного заполнения матрицы-произведения. Результат содержит столько строк, сколько строк в первой матрице, и столько столбцов, сколько столбцов во второй.

**Пример 3.**

****

 (2×3) (3×2) (2×2)

**Пример 4.**

**× = **

 (3×2) (2×3) (3×3)

**Транспонирование матриц**

Результатом *транспонирования* матрицы *A=()* размерности (*m×n*) является матрица *AT =(bij*) размерности (*n × m*), где *bij=aji.*

*A=(), AT= (), i=1,.....,m; j=1,.....,n. (5)*

Транспонирование матрицы соответствует замене строк столбцами.

**Пример 5.**

*А = АТ = *

Если *E-*единичная матрица, то *E=ET*. Двукратное транспонирование не изменяет матрицу: *(AT)T=A*

**Определитель матрицы**

Рассмотрим квадратные матрицы , *i,j=1,.....,n*.

 Определителем (детерминантом) матрицы,  состоящей из одного числа , называется само это число.

 Определителем матрицы =  второго порядка называется число, равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей:

 *Δ= detA =  = = (6)*

Рассмотрим матрицу размерности *3×3*:



Определителем матрицы *А* называется *число*, равное

*detA* =  (7)

Данная формула называется формулой *разложения определителя* третьего порядка *по элементам первой строки*.

**Правило треугольников нахождения определителя матрицы 3×3**

Если элементы матрицы отметить точками, то получим *правило треугольников:*

Слагаемые со знаком плюс представляют собой произведение элементов определителя, взятых по три так, как указано линией на левой части рисунка, а со знаком минус – на правой части.

**Правило «диагоналей» нахождения определителя матрицы 3×3**

Если дописать справа от матрицы два первых столбца (отмечены сверху) и провести линии следующим образом:

 (8)

то слагаемые со знаком плюс представляют собой произведение элементов определителя, взятых по три так, как указано линией на левой части рисунка, а со знаком минус *–* на правой части.

Внимание! Данное правило применимо только для определителей матриц размерностей *2×2 или 3×3*!

**Свойства определителей**

1. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной

матрицы. (Это определяет равноправность строк и столбцов, поэтому все дальнейшие свойства можно формулировать и для строк и для столбцов.)

2. Если поменять в определителе местами какие-либо две строки (столбца), то определитель меняет знак.

3. Общий множитель всех элементов какой-либо строки (или столбца) можно выносить за знак определителя.

4. Определитель равен 0, если:

* в определителе какие-либо две строки (столбца) равны (пропорциональны) между собой;
* все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны 0.

 5. Если к элементам какой-либо строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца) этого же определителя, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.

Если матрица A имеет хотя бы один определитель r-ого порядка, составленный из строк и столбцов данной матрицы, не равный нулю, а все определителя (r+1)-го порядка равны нулю, то r называется ***рангом*** матрицы A.

**Вопросы для самоконтроля:**

1. Определение матрицы, размерности матрицы. Квадратная, единичная, треугольная, диагональная матрицы.
2. Умножение матрицы на число. Сложение матриц. Свойства сложения.
3. \*Умножение матриц. Какой размерности матрицы можно перемножать?
4. Определитель матрицы, свойства определителя.
5. Способы вычисления определителя 2-го, 3-го порядка. Примеры.
6. \*Способы вычисления определителя n-го порядка.
7. Ранг матрицы.

**Задания для самоконтроля:**

***Вычислить***

1. *В-2С , АВ(\*),*

*где , , *

1. *:*

3)* .*

4) Cт+(3A-B)



2. Проверить, существует ли произведение матриц:

***Вычислить определители:***

1. *.*
2. **
3. **
4. 
5. 
6. **
7. *\**
8. *При каких значениях а обращается в 0 определитель:.*