

A collection of dark gray, three-dimensional geometric shapes, including cubes and dodecahedrons, scattered across the left side of the slide. Some shapes are sharp and in focus, while others are blurred, creating a sense of depth.

Лекция № 3
для студентов 1 курса обучающихся по
специальности 37.05.01

**Клиническая психология (очная форма
обучения)**

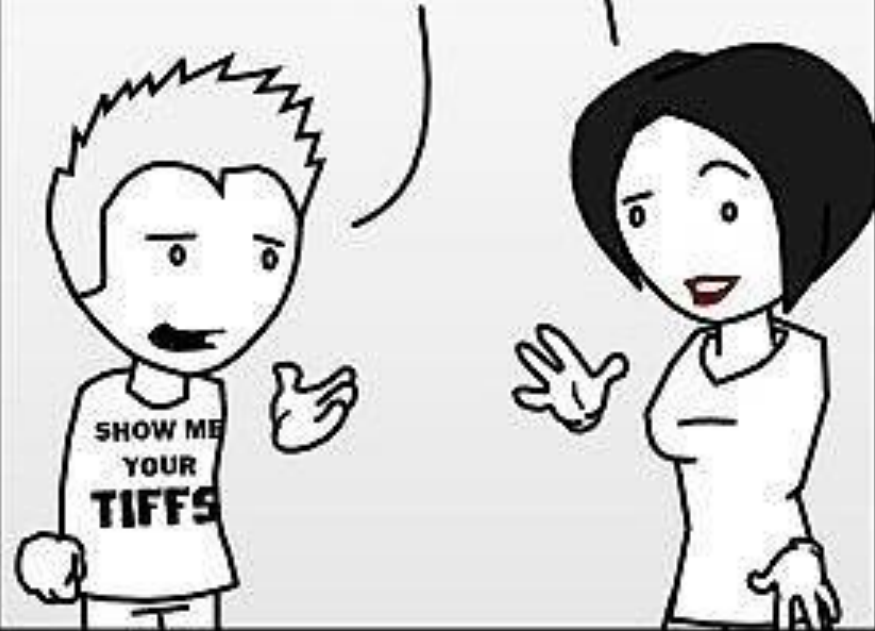
Основы дифференциального исчисления.

© Составитель: доцент кафедры
медицинской и биологической физики,
к. ф.-м. н. Романова Н. Ю.

#052 "Двойные стандарты"

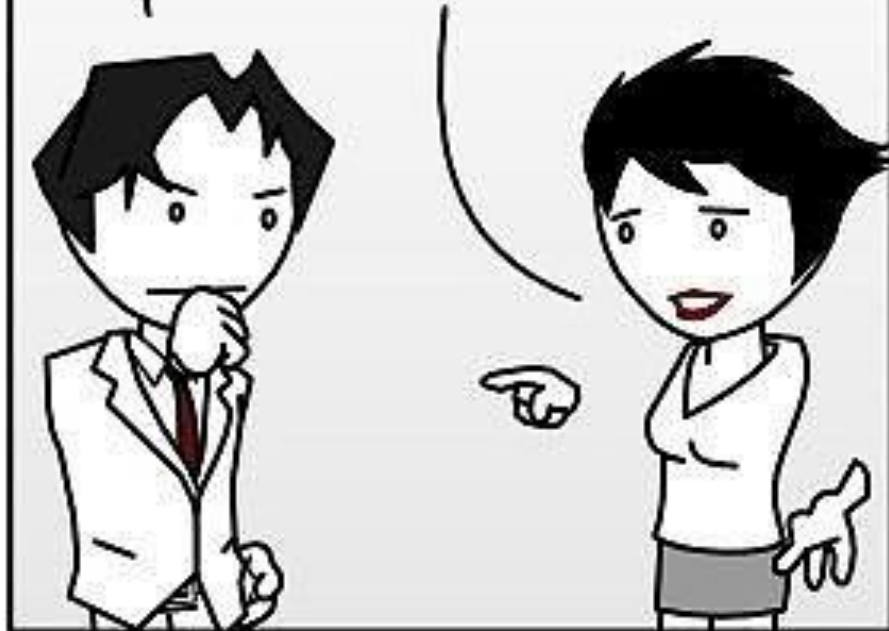
Я, честно говоря, уже не помню,
как вычислять производную,
и зачем она вообще нужна...

Все нормально.
Не забивай голову



Признаться, я не уверен, писал ли
Пастернак прозу или стихи. . .

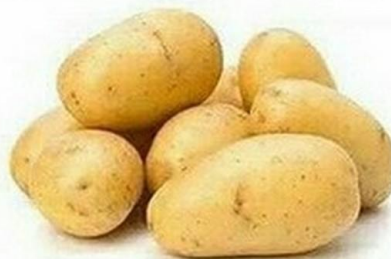
Господи, ну как?
Как можно быть настолько
ограниченным?



План лекции

1. Понятие функции.
2. Производная функции.
3. Правила дифференцирования
4. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала.
5. Частные производные. Полный дифференциал.

$$f(x) =$$



$$f'(x) =$$



Значение темы

- Понятие производной и интеграла широко используется в математике, статистике и прикладных науках. С их помощью определяют скорости изменения функций, функции распределения, решают дифференциальные уравнения, описывающие в том числе и социальные, биологические и др. явления нашей жизни.



Функция и её свойства

При изучении явлений природы и общества мы на каждом шагу сталкиваемся с изменением величин, с зависимостью одной из величин от другой. Поэтому понятие о переменной величине является основным в математическом анализе.

Под *переменной величиной* мы будем понимать величину, которая в процессе изучения какого-либо явления принимает хотя бы два различных значения. Если все значения, принимаемые переменной величиной, объединить, то мы получим *множество значений* этой величины.

Функция - зависимость переменной y от переменной x , если каждому значению x соответствует единственное значение y .

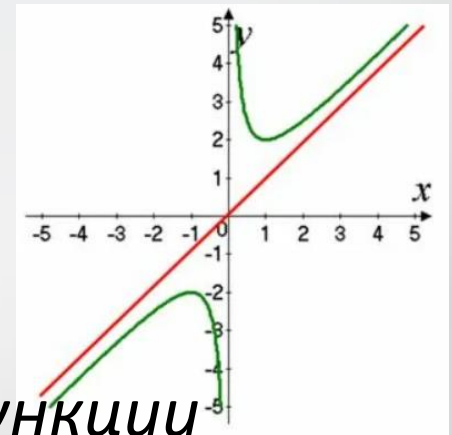
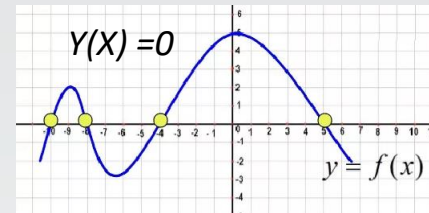
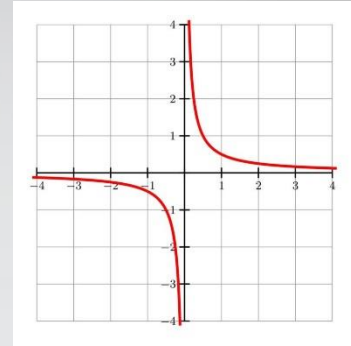
Переменная x — независимая переменная или аргумент.

Переменная y — зависимая переменная.

Значение функции — значение y , соответствующее заданному значению x .

Основные характеристики и свойства функции $y=f(x)$

- Область значений y и x
- Постоянство или монотонность функции на отрезке
- Нули функций
- Разрывы и полюса функции
- Экстремумы, минимумы и максимумы функции
- Перегибы функции
- Асимптоты функции
- Вогнутость и выпуклость функции



Понятие производной

Производной функции $f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю, т.е.

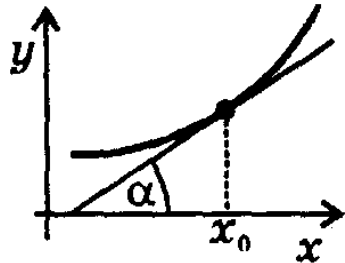
$$y' = y'_x = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Геометрический смысл производной – тангенс угла наклона касательной, проведенной к функции в данной точке.

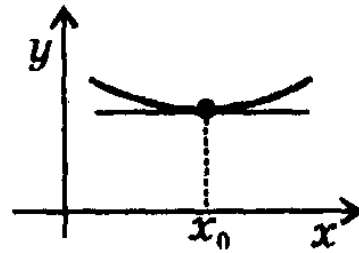
Физический смысл производной – быстрота (скорость) изменения функции.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

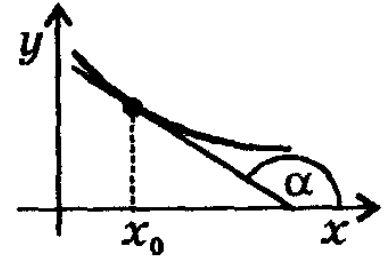
Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке:



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha > 0$$

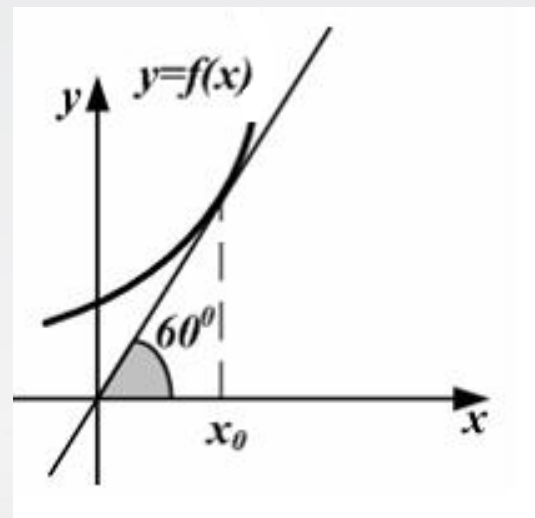


$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = 0$$



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha < 0$$

- **Пример.** Значение производной функции в точке x_0 равно $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \approx 1,73$:



**Таблица производных от основных функций
(обязательные для запоминания):**

<i>Функция</i>	<i>Производная</i>
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$ ($a = \text{const}$), в частности,
 $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ и $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
2. $(\log_a x)' = (1/x) \log_a e$, в частности $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
3. $(a^x)' = a^x \ln a$.
4. $(\sin x)' = \cos x$.
5. $(\cos x)' = -\sin x$.
6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ($x \neq \pi/2 + \pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).
7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ($x \neq \pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).
8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$.
9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$.
10. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.



Основные правила дифференцирования:



$$C' = 0$$

$$(U \pm V)' = U' \pm V'$$

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + V' \cdot U$$

$$(C \cdot U)' = C \cdot U'$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - V'U}{V^2}$$

$y'' = (y')'$ - вторая производная.

$f(x)$ и её друзья

Умри, Экспонента!

e^x

$(\quad)'_y$

Не сегодня.

e^x



$\frac{\partial z}{\partial x}$
БРО

Эта няшка - дифференциал. Он весьма полезный, а вычислять его - одно удовольствие. Ты можешь продифференцировать любую функцию без труда - его формулы легки в запоминании и не раз тебя выручат. Однозначно, дифференциал - твой БРО!

$\int f(x) dx$

НЕ БРО

Это концентрированное зло, прямоком из самых глубин ада будет троллить тебя всю жизнь. Вычисления занимают у тебя бесценные годы твоей жизни и километры бумаги. Один его знак похож на орудие пытки, коим он и является. Беги от него в страхе - он тебе не бро!

Производная сложной функции

Если функция имеет сложный аргумент или сама является аргументом, то производная сложной функции равна произведению производных составляющих ее аргументов. Причем количество сомножителей определяется глубиной вложения.

$$y = f[z(x)]$$
$$y' = f'_z \cdot z'_x$$



Пример: $y = \sin^2 x$, где $z = \sin x$ («внутренняя» функция), $y = z^2$ («внешняя функция»)

$$y' = 2z \cdot \cos x = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

Производная сложной функции равна производной «внешней» функции, взятой по переменной Z , помноженной на производную «внутренней» функции - Z' .

Примеры.

Пример 1. Вычислить производную функции

$$y = x^2 \ln x.$$

Решение. Применяем правило дифференцирования произведения элементарных функций:

$$y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 (1/x) = 2x \ln x + x.$$

Пример 2. Вычислить производную функции $y = e^{x^2}$.

Решение. Представим эту функцию в виде суперпозиции двух функций:

 $y = e^z$ и $z = x^2$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = (e^z)'_z (x^2)'_x = e^z \cdot 2x = e^{x^2} \cdot 2x$$

Пример 3.

Уровень раздражительности ребенка -X - в зависимости от времени начала занятия изменяется по закону:

$$x(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + 1$$

Найти, какое значение будет иметь скорость изменения X через 3 с после начала занятия.

Решение. По определению, скорость – это первая производная по времени от функции $x(t)$, поэтому

$$v(t) = x'(t) = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + 1 \right)' = t^2 + t + 1 = 3^2 + 3 + 1 = 13 \text{ (ед/с)}$$

$$v(t) = s'(t)$$

Мгновенная скорость (v) – это производная пути (s) по времени (t).

$$a(t) = v'(t)$$

Ускорение (a) – это производная скорости (v).

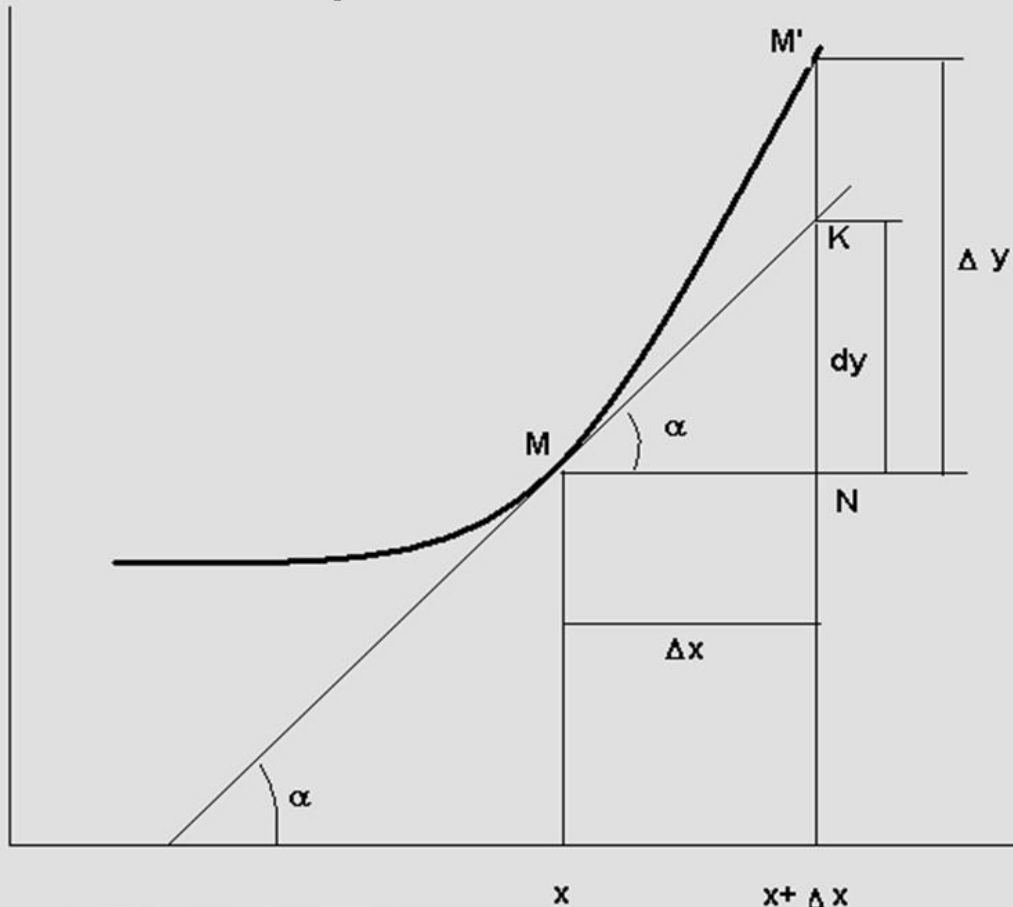
Пример 4.

$$\frac{d \text{cow}}{dt} = \text{milk} \quad \frac{d \text{milk}}{dt} = \text{cheese}$$

Дифференциал - dx , dy .

$$dy = y'_x \cdot dx, \quad \text{т. к.} \quad y'_x = \frac{dy}{dx}$$

Геометрический смысл дифференциала



$$NK = MN \cdot \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= y'_x \cdot \Delta x = dy$$

Δy – приращение
ординаты кривой;

dy – приращение
ординаты касательной;

или

**ЛИНЕЙНАЯ ЧАСТЬ
ПРИРАЩЕНИЯ
ФУНКЦИИ**

Частные производные



$$z = f(x, y)$$

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$



Частные дифференциалы:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx$$

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Полный дифференциал функции z :

$$dz = d_x z + d_y z = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Использование дифференциала в приближенных вычислениях

- Для нахождения приближенного значения приращения функции

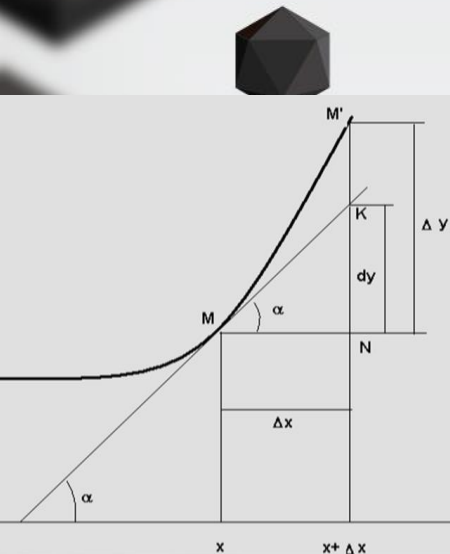
$$\Delta y \approx dy = y' dx$$

- Для нахождения приближенного значения функции в заданной точке

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'_x \cdot dx$$

- Для вычисления погрешностей

$$\Delta N_{абс} \approx dN; \quad \Delta N_{отн} \approx \frac{dN_{абс}}{N}$$



Использование производной для исследования функции

- **Возрастание (убывание) функции**
- Функция $f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке, если для любых точек $x_1 < x_2$ из справедливо неравенство

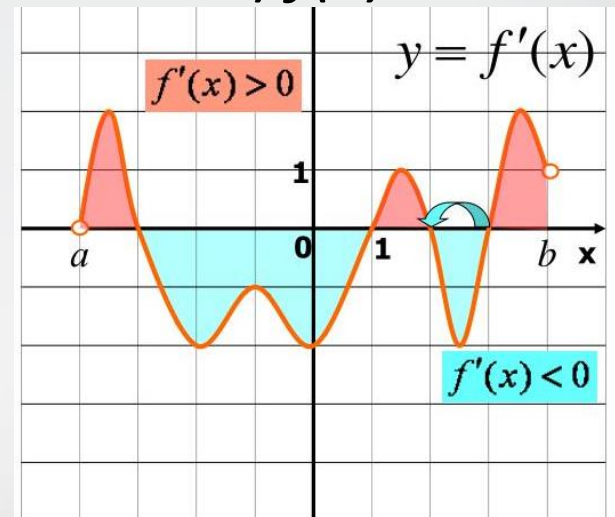
$f(x_1) < f(x_2)$ - возрастание

$f(x_1) > f(x_2)$ - убывание.

- Для возрастания (убывания) $f(x)$ на достаточно, чтобы

$$f'(x) > 0 (< 0)$$

при любом $x \in (a, b)$.



Перегибы, выпуклость и вогнутость функции

Если вторая производная в точке М больше нуля, то кривая в той точке вогнута вниз.

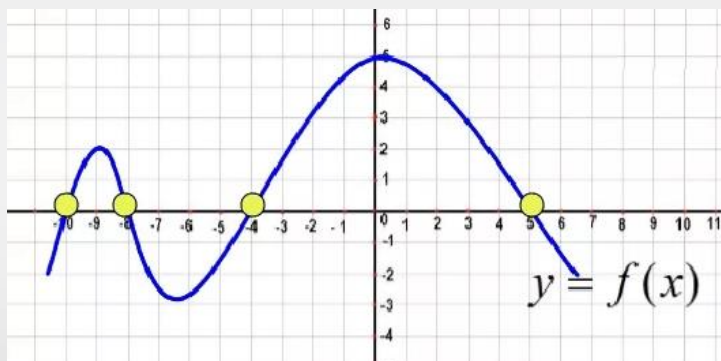
$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} > 0$$

Если вторая производная в точке М меньше нуля, то кривая в той точке выпукла вверх.

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} < 0$$

Если вторая производная в точке М равна нулю, то М – **точка перегиба**

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = 0$$



Минимумы и максимумы функции

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум (максимум), если в некоторой окрестности этой точки ее значения больше (меньше) значения $f(x_0)$

Экстремум = минимум или максимум

Необходимое условие существования экстремума: экстремум функции достигается в точках, где значение производной равно нулю.

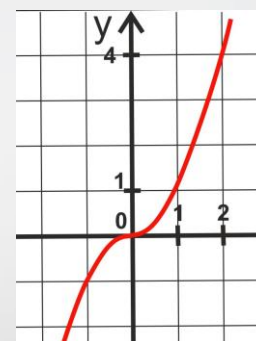
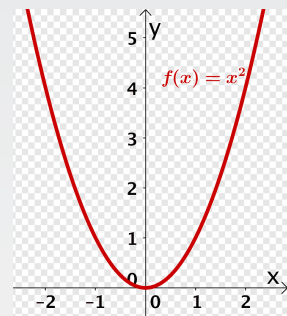
$$y = x^2; y' = 2x; y'(x=0) = 0$$

$x = 0$ - точка экстремума

$$y = x^3; y' = 3x^2; y'(x=0) = 0$$

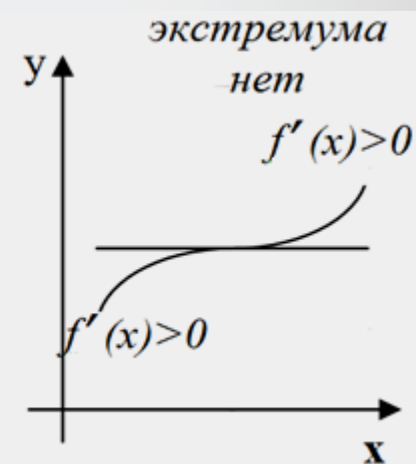
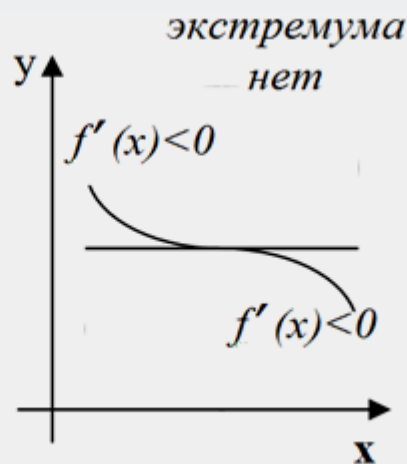
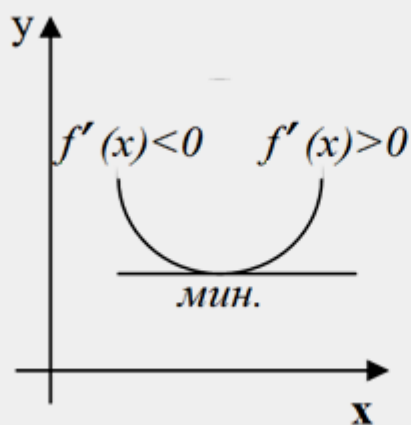
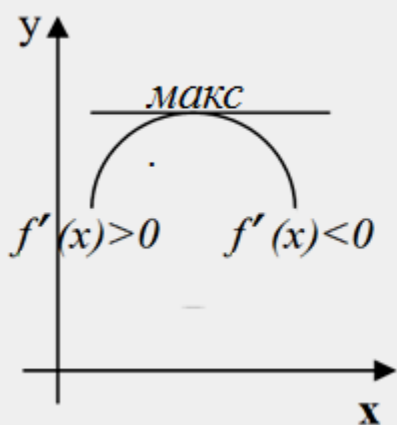
$x = 0$ - стационарная точка,

но не экстремум.



Первое достаточное условие экстремума дифференцируемой функции:

- Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки c , при этом точка c - стационарная, т.е. $f'(c) = 0$, тогда:
- если существует окрестность, в которой производная $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева от точки c и отрицательна (положительна) справа от точки c , то функция $f(x)$ имеет в т. c *локальный максимум (минимум)* (рис. 1,2);
- если производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки c , то экстремума в ней нет (рис 3,4).



2-е достаточное условие экстремума функции:

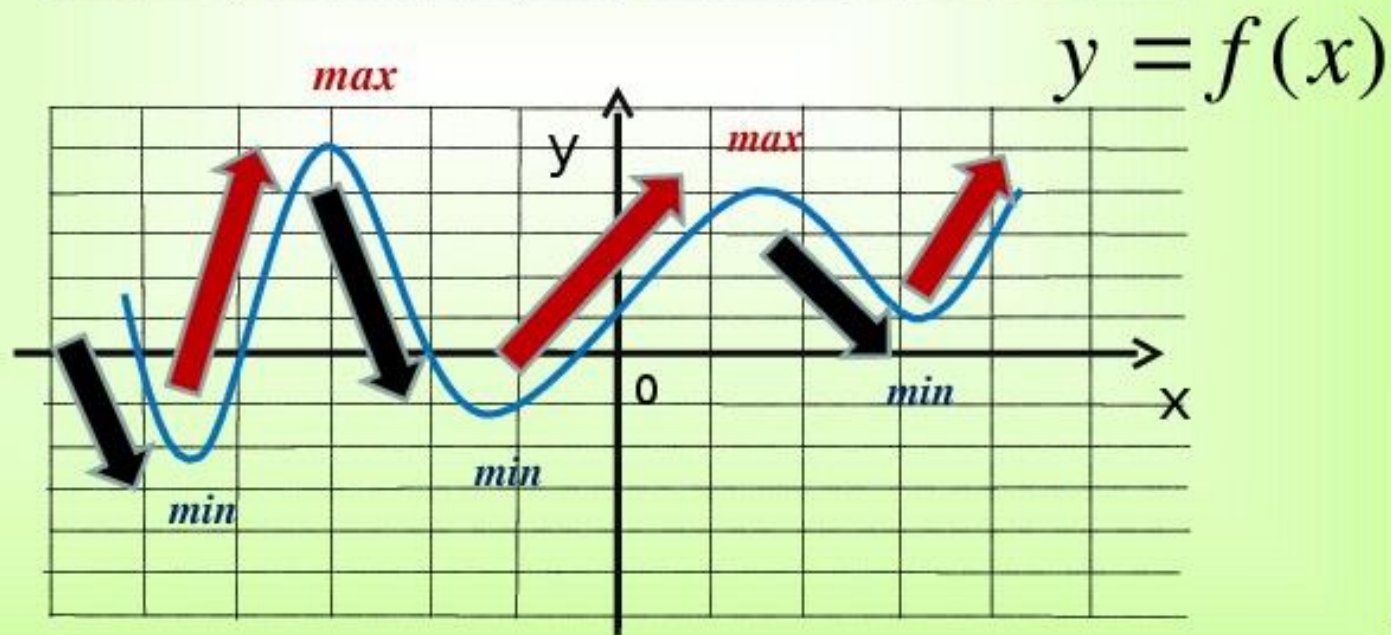
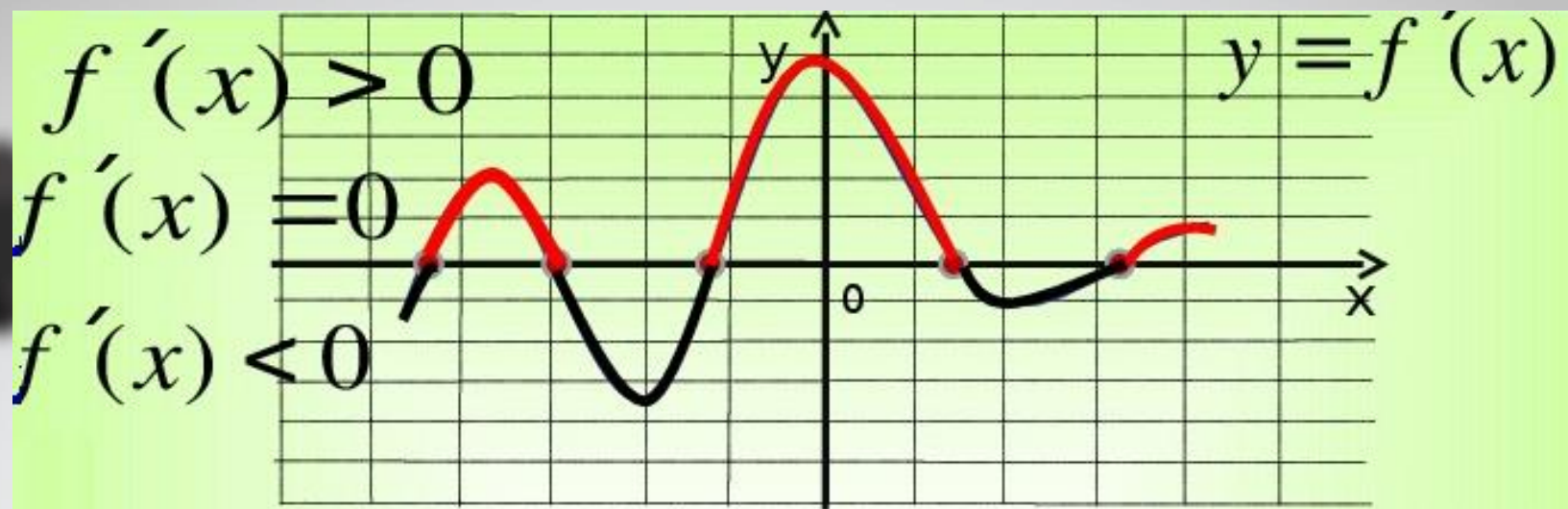
Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную всюду в некоторой окрестности т.С; т.С – стационарная:

$$f'(x) = 0;$$

имеем конечную вторую производную в т.С.

- если $f''(C) < 0$, то в т. $x = C$ $f(x)$ имеем локальный **максимум**,
- если же $f''(C) > 0$, то в точке $x = C$ $f(x)$ имеем локальный **минимум**.

Это условие не дает ответа о наличии экстремума в том случае, когда $f''(C) = 0$ или не существует в т. $x = C$. В этом случае поведение функции в т. С следует изучить с помощью первого достаточного условия экстремума.



Итак, нами изучены:

- Понятие функции. Непрерывность. Монотонность.
- Производная функции. Правила дифференцирования
- Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала.
- Частные производные. Полный дифференциал.

Рекомендованная литература:

1. Ганичева, А.В. Математика для психологов /А.В. Ганичева, В.П. Козлов. – М.: Аспект Пресс, 2005. – 239с.
2. Павлушков И.В. Основы высшей математики и математической статистики. М., ГЭОТАР-Медиа, 2007, с.122-188.
3. Кричевец, А.Н. Математика для психологов /А.Н. Кричевец, Е.В. Шикин, А.Г. Дьячков. – М.: Флинта: НОУ ВПО «МПСИ», 2010.– 376 с.

Several dark gray, three-dimensional geometric shapes, including cubes and polyhedrons, are arranged in a cluster on the left side of the slide. They have a matte finish and are slightly out of focus.

Спасибо за внимание!