Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Красноярский государственный медицинский
университет имени профессора В. Ф. Войно-Ясенецкого»
Министерства здравоохранения Российской Федерации

Фармацевтический колледж

1942/2017
75

МАТЕМАТИКА

курс лекций для обучающихся по специальностям
31.02.03– Лабораторная диагностика,
33.02.01– Фармация,
34.02.01 – Сестринское дело

Красноярск
2016

УДК 51(042.4)
ББК 22.1
М 34

Математика: курс лекций для обучающихся по специальностям 31.02.03 – Лабораторная диагностика, 33.02.01– Фармация, 34.02.01 – Сестринское дело/ сост. Е. П. Клобертанц; Фармацевтический колледж. – Красноярск : тип. КрасГМУ, 2016. –105 с.

Составитель: Клобертанц Е.П.

Курс лекций предназначен для обучающихся по специальностям 31.02.03 – Лабораторная диагностика, 33.02.01– Фармация, 34.02.01 – Сестринское дело. Целью курса лекций является организация самостоятельной работы студентов по овладению теоретическим материалом. Курс лекций составлен в соответствии с ФГОС СПО (2014 г.) по специальности 31.02.03 – Лабораторная диагностика, 33.02.01– Фармация, 34.02.01 – Сестринское дело, рабочей программой дисциплины (2015 г.) и СТО СМК 4.2.01-11. Выпуск 3

Рекомендован к изданию по решению методического совета Фармацевтического колледжа (протокол № 2 от 17.10.16 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

Роль и место математики в современном мире.
Пределы, их свойства.

План:

1. Роль и место математики в современном мире
2. Понятие функции и способы ее задания
3. Классификация функций
4. Основные свойства функций
5. Обратные функции
6. Понятие предела функции
7. Свойство непрерывности функции
8. Классификация точек разрыва

1.Роль и место математики в современном мире

Математика - область человеческого знания, изучающая математические модели, отражающие объективные свойства и связи.

Дисциплина математика входит в программу всех средних и высших учебных заведений. Это связано с ее особой ролью. Великий математик карл Фридрих Гаусс назвал математику «царицей всех наук». Изучение математики невозможно без знания ее истории. Академик А.К. Колмогоров выделил четыре периода развития математики.

1 период (с древнейших времен до VIII-VII вв до н.э.) – зарождение математики. Период связан с формированием понятий числа, площади, дроби, арифметических действий. К концу периода математика формируется как отдельная наука, имеющая свой предмет и метод.

2 период (с VI-V вв до н.э. до XVI в н.э.) – становление математики постоянных величин (Пифагор: «Суть всего есть число», «Начала» Евклида, особенность греческой математики заключалось в необходимости доказательства правильности полученного результата.

3 период (XVII-начало XIX вв) – эпоха математики переменных величин. Р.Декарт ввел понятия переменных величин в аналитической геометрии, И.Ньютон и Г.Лейбниц создают дифференциальное и интегральное исчисление.

4 период (со второй половины XIX в. и по настоящее время) – бурное развитие математики, применение ее в различных областях человеческой деятельности

Крупнейшие достижения этого периода связаны с работами Н.И.Лобачевского – создавшим неевклидову геометрию, Г.Контор – создатель теории множеств, Д.Гильберг – аксиоматика элементарной геометрии, А.Н. Колмогоров – аксиоматика теории вероятности.

Математика не только обрабатывала показания приборов и результатов экспериментов, но она стала идти впереди них, создавая такие математические модели, реальный физический смысл которых, еще не вполне ясный, предстояло открыть. Современный мир неожиданно обнаружил, что математика уверенно расположилась в самых разных частях и уголках. Так, огромным успехом является применение математических методов к исследованиям в области биологии. Это оказалось возможным, главным образом, благодаря проникновению биологии во внутриклеточные процессы и анализу их на молекулярном уровне.

Гибкий арсенал методов математической статистики, используемых в медицине, позволяет выявить закономерности в потоках случайных событий,

сделать выводы и прогнозы, основанные на доказанном, дать оценки вероятностей их выполнения или невыполнения.

Роль математики в современной науке постоянно возрастает. Это связано с тем, что без математического описания ряда явлений действительности трудно надеяться на их глубокое понимание и освоение.

Математическое образование является средством активного интеллектуального развития человека, его мыслительных способностей.

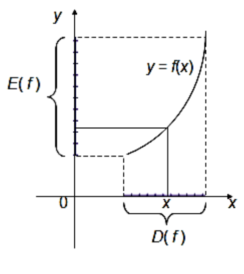
Человек, изучающий математические термины, утверждения, доказательства, умеющий решать задачи, вырабатывать стиль мышления, характеризующийся краткостью, лаконичностью, логикой суждений. Человек, знающий математику, и в своей профессиональной деятельности стремится строго следовать тому предписанию и набору правил, которые приводят к получению правильного результата. Поэтому одной из задач математики является высокоинтеллектуальное развитие человека, способного творчески решать поставленные задачи и адаптироваться к динамически развивающемуся обществу. С этой точки зрения, конкретные математические знания рассматриваются как основы для дальнейшей профессиональной деятельности, а сам процесс изучения математики – как развивающая функция, способствующая повышению интеллектуального уровня обучающегося.

Математика является фундаментальной наукой и без неё невозможно обойтись во всех сферах человеческой деятельности. Огромную роль математика играла в медицине с самого начала её развития.

Пример: Построение партограмм, исследование графиков температуры тела, графиков артериального давления, базальной температуры, нахождение скорости охлаждения тела, скорости химических реакций, закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток, в медицинских исследованиях часто применяются различные методы анализа и обработки данных, решаемые с помощью методов математической статистики и т.д.

Начать изучение математики невозможно без исследования функций, без понимания, что такое функция, без знания свойств функции.

2.Понятие функции и способы ее задания



Функция - это одно из важнейших математических понятий.

Функция – зависимость переменной **y** от переменной **x**, при которой каждому значению **x** соответствует единственное значение **y**.

Переменную **x** называют независимой переменной или аргументом. Переменную **у** называют зависимой переменной.

Все значения независимой переменной (переменной х) образуют область определения функции. Все значения, которые принимает зависимая переменная (переменная у), образуют область значений функции.

Способы задания функции:

1. Аналитический (формулы)
2. Табличный
3. Геометрический (график)

Преимущество геометрического способа: наглядность.

Пример: Многие приборы, применяемые в медицине и фармации, записывают непосредственно на бумаге или на экране электронно-лучевой трубки результат исследования в виде графика. Так, кривая, записанная на ленте барографа, определяет давление как функцию времени. С помощью электрокардиографа на пленке фиксируется величина возникающих при сокращении сердечной мышцы биопотенциалов U как функция времени t.

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты - соответствующим значениям функции, то есть по оси абсцисс откладываются значения переменной х, а по оси ординат откладываются значения переменной у.

3.Классификация функций

1. Линейная функция (у = kx + b, график-прямая линия)
2. Квадратичная функция ($y = ax^2 + вx + c$, где а, в, с – некоторые числа, причем $a \neq 0$, график –парабола)
3. Степенная функция ($y = x^n$, если n- четное, то график-парабола, если n-нечетное, то график- кубическая парабола)
4. Обратная пропорциональность (у=к/х, график - гипербола)
5. Показательная функция
6. Логарифмическая функция
7. Тригонометрические функции
8. Обратные тригонометрические функции

4.Основные свойства функций

Для построения графика функции необходимо знать свойства функции.

1) Область определения функции и область значений функции.

В элементарной математике изучаются функции только на множестве действительных чисел.

Область определения функции – все значения, которые принимает независимая переменная. Обозначается : D (f).

Область (множество) значений функции – все значения, которые принимает зависимая переменная. Обозначается: E (f).

2) Четность (нечетность) функции.

Четная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из области определения выполняется равенство f(-x) = f(x).

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечетная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из области определения справедливо равенство f(-x) = - f(x).

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

3) Монотонность функции.

Возрастающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Убывающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

4) Ограниченная и неограниченная функции.

Функция называется *ограниченной*, если существует такое положительное число M, что $|f(x)| \le M$ для всех значений x . Если такого числа не существует, то функция - неограниченная.

5) Наибольшее и наименьшее значения функции

Число m называют наименьшим значением функции $y = f(x)$на множестве $X \subset D(f)$, если:

1) в X существует такая точка x_0, что $f(x_0) = m$;
2) для всех x из X выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_0)$.

Число M называют наибольшим значением функции $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$, если:

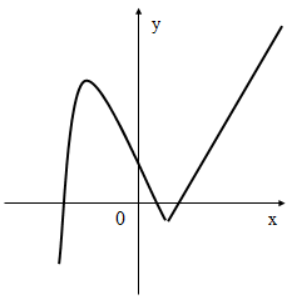
1) в X существует такая точка x_0, что $f(x_0) = M$;
2) для всех x из X выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

6) Периодичность функции.

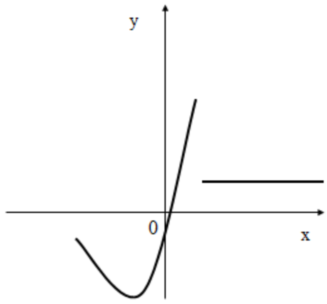
Функция f(x) - *периодическая*, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения функции имеет место: f(x+T) = f(x)= f(x-T). Такое наименьшее число называется периодом функции. Все тригонометрические функции являются периодическими.

На практике встречаются явления, повторяющиеся через определенные промежутки времени. Например, повторяется положение минутной стрелки через промежуток времени, равный одному часу, значение давления крови в сердце человека через промежуток времени, равный длительности одного цикла. Многочисленные эксперименты показали, что в растениях происходят колебательные процессы с периодом, равным году, суткам, нескольким минутам и даже секундам. Это физиологические процессы: фотосинтез и дыхание, поглощение и испарение воды, увеличение массы, рост и движение листьев. Такие периодически повторяющиеся процессы описываются периодическими функциями.

7) Непрерывность функции



Непрерывная функция



Не непрерывная функция

5.Обратные функции

Если функция $y = f(\ x\ )$ принимает каждое своё значение y только при одном значении x, то эту функцию называют *обратимой*.

Пусть $y = f(x)$ – обратимая функция. Тогда каждому y из множества значений функции соответствует одно определённое число x из области её определения, такое, что $f(x) = y$. Это соответствие определяет функцию x от y, которую обозначим $x = g(y)$. Поменяем местами x и y: $y = g(x)$.Функцию $y = g(x)$ называют обратной к функции $y = f(x)$.

Дано: $y = \dfrac{1}{x-2}$

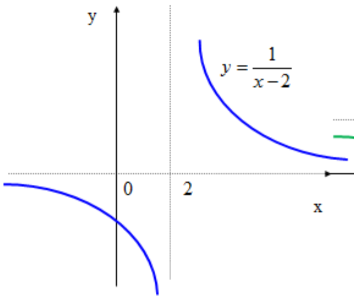
Найти функцию, обратную данной $y = f^{-1}(x)$.

$$\frac{1}{x-2} = y$$

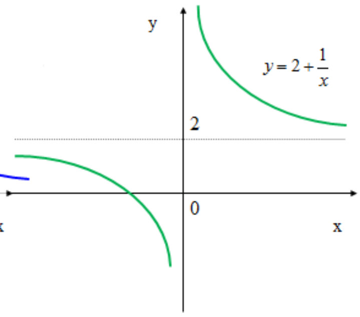
$$x - 2 = \frac{1}{y}$$

$$x = 2 + \frac{1}{y} \implies y = 2 + \frac{1}{x}$$

Ответ: $f^{-1}(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$



1. D(y)=(-∞;2)∪(2;+∞)
2. E(y)=(-∞;0)∪(0;+∞)

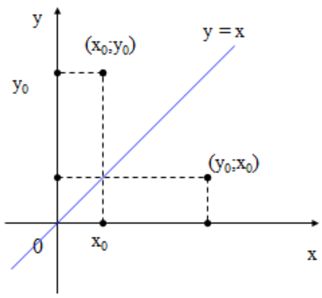


1. D(y)=(-∞;0)∪(0;+∞)
2. E(y)=(-∞;2)∪(2;+∞)

Свойства обратных функций

1. Область определения обратной функции f^{-1} совпадает с множеством значений исходной f, а множество значений обратной функции f^{-1} совпадает с областью определения исходной функции f: $D(f^{-1}) = E(f)$, $E(f^{-1}) = D(f)$.

2. Монотонная функция является обратимой:
   – если функция f возрастает, то обратная к ней функция f^{-1} также возрастает;
   – если функция f убывает, то обратная к ней функция f^{-1} также убывает.
3. Если функция имеет обратную, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой y = x.



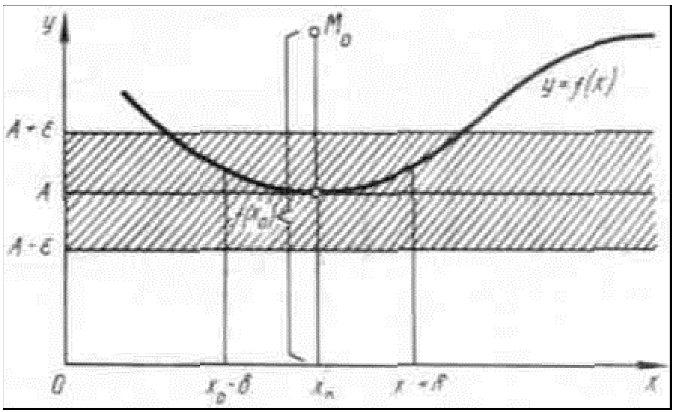
6.Понятие предела функции

Теория пределов позволяет определить характер поведения функции
y = f(x) при заданном изменении аргумента.

Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = x_0 за исключением, быть может, самой точки x_0.

Число А называется *пределом функции* f(x) в точке x_0, если для любого числа έ > 0 найдется такое положительное число δ что для любого x ≠ x_0, удовлетворяющего неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется соотношение $|f(x) - A| <$ έ.

То, что функция f(x) в точке x_0 имеет предел, равный А, обозначают следующим образом: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$



Геометрически существование предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ означает, что

каково бы ни было έ > 0, найдется такое число δ, что для всех x, заключенных между x_0+ δ и x_0- δ (кроме, быть может, самой точки x_0), график функции
y = f (x) лежит в полосе, ограниченной прямыми y = A - έ и y= A + έ.

Таким образом, понятие предела функции дает возможность ответить на вопрос, к чему стремятся значения функции, когда значения аргумента приближаются к x_0.

Предел функции на бесконечности аналогичен пределу функции в точке и все свойства сохраняются.

Функция f(x) называется *бесконечно малой* при x→a (x→∞) если предел этой функции:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

Функция f(x) называется *бесконечно большой* при x → a (x→0) если предел этой функции:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = \infty$$

При вычислении пределов пользуются следующими *правилами*: если существуют limf(x) и limg(x), то:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} kf(x) = k\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\bullet g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\bullet \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

Неопределенности и методы их решения

Случаи, в которых подстановка предельного значения в функцию не дает значения предела, называют *неопределенностями*:

$$\left[\frac{0}{0}\right] \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \qquad \left[1^{\infty}\right] \qquad \left[\infty-\infty\right]$$

Устранить неопределенности часто удается с помощью алгебраических преобразований.

1. Неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Методы:

1. Разложение числителя и знаменателя на множители с последующим сокращением
2. Устранение иррациональных разностей. Домножение на сопряженное.
3. Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Примеры:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+7x+12}=\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x+4)(x+3)}=$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)}{(x+4)}=\frac{-6}{1}=-6.$$

(1-й замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\overset{1}{\sin 7x}}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$$

2. Неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Методы:

1. Деление на наибольшую степень

Пример:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x^2}^{\to 0}+\frac{1}{x}^{\to 0}+3}=\frac{2}{3}$$

3.Неопределенность $\left[1^{\infty}\right]$

Методы:

1. Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+a)^{\frac{1}{a}}=e$$

Пример:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}4x}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}}=e^{\frac{4}{3}}$$

e (2-ой замечательный предел)

4.Неопределенность $[\infty-\infty]$

Методы:

1. Если функция представляет собой алгебраическую сумму дробей, то неопределенность устраняется или приводится ко 2-му типу после приведения дробей к общему знаменателю.
2. Если функция представляет собой алгебраическую сумму иррациональных выражений (корней), то неопределенность устраняется или приводится к 1-му типу путем домножения и деления функции на одно и то же (сопряженное) выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения.

Пример:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

7.Свойство непрерывности функции

Функция y =f(x) называется *непрерывной* в точки, если:

- она определена в этой точке;
- существует предел limf(x);
- этот предел равен значению функции в точке x_0 т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Функция, непрерывная в каждой точке промежутка называется *непрерывной на этом промежутке.*

Пример: Ряд явлений в окружающей нас жизни описывается непрерывными функциями. Слух, зрение, восприятие ультразвука связаны с колебательными процессами, которые описываются с помощью непрерывных функций sin, cos.

Свойства непрерывности функции может выполняться в одних точках и нарушаться в других.

Свойства непрерывных функций

Теорема 1:Если функции *f(x)* и *g(x)* непрерывны в точке , то функции *f(x)± g(x), f(x)g(x),* $\frac{f(x)}{g(x)}, g(a)\neq 0$также непрерывны в точке.

Теорема 2:Пусть функция *y=g(x)* непрерывна в точке *a* , а функция *u=f(y)* непрерывна в точке *b=g(a)*. Тогда композиция функций *u=f(g(x))* непрерывна в точке *a*.

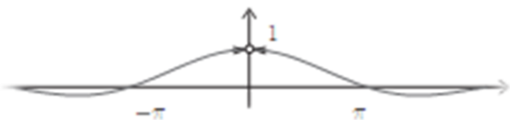
8.Классификация точек разрыва

Если прерывность функции нарушается в некоторой точке, эту точку называют *точкой разрыва* функции.

Говорят, что функция f(x) имеет *точку разрыва первого рода* при x=a, если в этой точке:

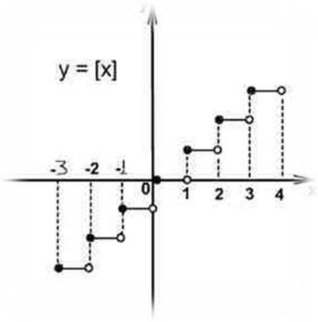
- существуют левосторонний предел limf(x)
  x→a−0
  и правосторонний предел limf(x);
  x→a+0
- эти односторонние пределы конечны.
  Функция имеет точку разрыва первого рода(устранимый разрыв)

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)$$



Функция имеет точки разрыва первого рода (скачок-неустранимый разрыв)

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x)$$



Точка x_0 называется *точкой разрыва 2-го рода*, если в этой точке функция имеет по крайней мере один из односторонних пределов, или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

Контрольные вопросы для закрепления:

1. Математика, как наука, исторические периоды развития математики, роль математики.
2. Понятие «функция».
3. Способы задания функции, охарактеризуйте каждый из способов.
4. Свойства функции
5. Приведите классификацию функций и их графиков.
6. Приведите примеры четных и нечетных функций, периодических, ограниченных и неограниченных, непрерывных и не непрерывных
7. Понятие «предел функции».
8. Правила вычисления пределов.
9. Неопределенности и методы их решения.
10. Понятие непрерывно функции.
11. Свойства непрерывной функции.
12. Классификация точек разрыва.
13. Приведите примеры непрерывных функций и функций, имеющих точки разрыва.

Производная функции. Дифференциал и его приложение к приближенным вычислениям.

План:

1. Понятие производной. Таблица производных
2. Правила дифференцирования
3. Приложение производной
4. Понятие дифференциала функции.

1.Понятие производной. Таблица производных

Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ в точке x_0 к приращению аргумента $\Delta x=x-x_0$, когда последнее стремится к нулю:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

производную $f'(x_0)$ можно трактовать как *скорость изменения переменной y относительно переменной x в точке x_0.*

Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Функция, имеющая производную в некоторой точке, называется *дифференцируемой в этой точке.*

Функция, имеющая производную в каждой точке промежутка, называется *дифференцируемой на этом промежутке.*

Степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические функции дифференцируемы на любом интервале, где они определены, и их производные находятся по формулам.

Производные простейших элементарных функций:

$c' = 0$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
$(a^x)' = a^x \ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$, в частности $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Пример:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

2.Правила дифференцирования

Справедливы следующие правила нахождения производных:

Правила дифференцирования

С постоянным множителем	**сумма**
[ku(x)]’= ku(x)	(u+v)’=u’+v’

частное	**произведение**	**Сложная функция**
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	(uv)’=u’v+uv’	y=f(g(x)) y’=f’(g(x))g’(x)

Пример:

1) $y = 3x^2 + 5\sqrt[3]{x^5} - \dfrac{4}{x^3}$, $y' = \left(3x^2 + 5\sqrt[3]{x^5} - \dfrac{4}{x^3}\right)' = (3x^2)' + \left(5\sqrt[3]{x^5}\right)' - \left(\dfrac{4}{x^3}\right)'$

$y' = 6x + \dfrac{25}{3}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{12}{x^4}$

2) $y = x^3 \sin x$, $y' = \left(x^3 \sin x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \sin x + x^3 \cdot (\sin x)'$

$y' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$

3) $y = \dfrac{3x-1}{2x+5}$, $y' = \left(\dfrac{3x-1}{2x+5}\right)' = \dfrac{(3x-1)' \cdot (2x+5) - (3x-1) \cdot (2x+5)'}{(2x+5)^2}$

$y' = \dfrac{3 \cdot (2x+5) - (3x-1) \cdot 2}{(2x+5)^2}$, $y' = \dfrac{17}{(2x+5)^2}$

4) $y = \sin(3x-5)$,

$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)' = \cos(3x-5) \cdot (3-0) =$
$= 3\cos(3x-5)$

3.Приложение производной

Одним из важнейших понятий математического анализа является производная функции. Производная характеризует скорость изменения функции по отношению к изменению независимой переменной. В геометрии производная характеризует крутизну графика, в механике – скорость неравномерного прямолинейного движения, в биологии – скорость размножения колонии микроорганизмов, в экономике – отзывчивость производственной функции (выход продукта на единицу затрат), в химии – скорость химической реакции

Геометрический смысл производной

Значение производной функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $x=a$.

Уравнение касательной: $y=f(a)+f'(a)(x-a)$

Пример: Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2+1$ в точке с абсциссой $x_0=1$

Решение: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ – уравнение касательной

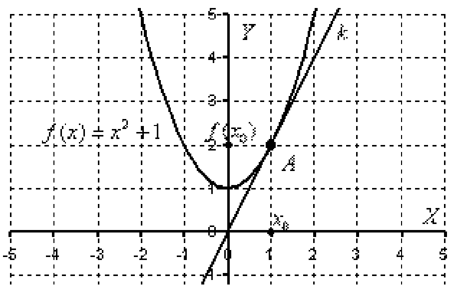
$f(x_0)=f(1)=1^2+1=2$

$f'(x)=2x, \quad f'(x_0)= f'(1)= 2*1=2$

Подставляем значения $x_0=1$, $f(x_0)=2$ и $f'(x_0)=2$ в формулу уравнения касательной: $y=2+2(x-1)$

Раскрываем скобки: $y=2+2x-2=2x$.

Таким образом, уравнение касательной $y=2x$ – это прямая.



Физический смысл производной

Понятие производной возникло как математическое описание скорости движения, поэтому важнейшим приложением производной является вычисление скорости.

Если $s=s(t)$ -закон прямолинейного движения,

то $s'(t)=v$ скорость движения в момент времени t

$s''(t) =v'(t)=a$ – ускорение.

Физический смысл производной состоит в нахождении скорости протекания процесса, описываемого зависимостью $y=f(x)$.

Пример: Пусть популяция бактерий в момент t (с) насчитывает $x(t)$ особей. $x(t)=3000+100t^2$

Найти скорость роста популяции:

а) в произвольный момент t,

б) в момент t = 1 с

Решение:

а) $P=x'(t)=200t$

б) $P(1)=200*1=200$

Приближенные вычисления

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

Пример: $(1,8)^3\approx 2^3+3*2^2(1,8-2)=8+12(-0,2)=8-2,4=5,6$

Исследование функции на монотонность

Теорема 1: Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$, то функция $y=f(x)$ возрастает на промежутке X.

Теорема 2: Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$, то функция $y=f(x)$ убывает на промежутке X.

Если функция f непрерывна в точке x_0, и производная меняет свой знак с $f'(x)>0$ на $f'(x)<0$, то точка x_0 является точкой *максимума.*

Если функция f непрерывна в точке x_0, и производная меняет свой знак с $f'(x)<0$ на $f'(x)>0$, то точка x_0 является точкой *минимума.*

Пример: Исследовать функцию на монотонность, найти экстремумы функции $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$.

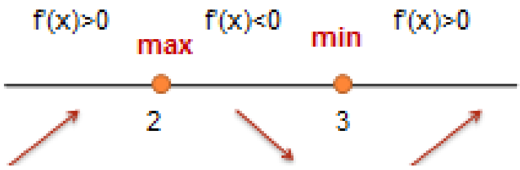
Решение:

1.Найти производную функции: $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$

2. Найти критические точки ($f'(x)=0$): $6x^2 - 30x + 36=0$

$6(x-2)(x-3)=0$, то критические точки функции $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

3. Определим монотонность функции и экстремумы:



Функция возрастает на промежутке $(-\infty;2) \cup (3;\infty)$, функция убывает на промежутке $(2;3)$.

Экстремумы: x=2 – максимум функции, x=3-минимум функции

4.Понятие дифференциала функции

С понятием производной функции тесно связано понятие дифференциала функции.

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то выражение вида $f'(x_0)\Delta x$, где $\Delta x=x-x_0$, называется *дифференциалом функции в точке* x_0 и обозначаетсяdf(x_0) или dy(x_0). Дифференциал независимой переменной dxсчитается равным её приращению Δx, поэтому $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$.

Итак, *дифференциал функции* равен произведению производной этой функции на дифференциал аргумента:

$$dy=df=f'(x)dx$$

Выражение производной через дифференциал функции:

$f'(x)=dy/dx$. При таком обозначении сразу видно, какая переменная является функцией, а какая аргументом.

Пример: Найти дифференциал функции $y=2x+3$

Решение: Найдем производную: $y'=2$

Запишем дифференциал: $dy=y'dx$, $dy=2dx$

Контрольные вопросы для закрепления:

1. Дайте определение производной.
2. Как называется операция нахождения производной.
3. По какой формуле находится производная степенной функции.
4. Чему равна производная постоянной функции.
5. Назовите правила дифференцирования.
6. В чем состоит практическое применение производной?
7. Дайте понятие дифференциала функции.
8. В чем состоит геометрический смысл производной и дифференциала функции.

Неопределенный и определенный интегралы и их свойства. Применение определенного интеграла к решению прикладных задач.

План:

1. Понятие первообразной
2. Неопределенный интеграл, свойства и таблица интегралов
3. Методы интегрирования
4. Понятие определенного интеграла
5. Методы решения определенного интеграла
6. Применение определенного интеграла

1.Понятие первообразной

Процесс обратный процессу дифференцирования называется *интегрированием*.

Процесс интегрирования применяется для нахождения *первообразной*.

Функция y=F(x) называют *первообразной* функции y=f(x) , если для всех x из области определения функцииF’(x)=f(x).

2.Неопределенный интеграл, свойства и таблица интегралов

Совокупность первообразных F(x)+C для данной функции f(x) называют *неопределенным интегралом* от функции f(x):

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Свойства интегралов

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad d\int f(x)dx = f(x)dx$$

$$\int dF(x) = F(x) + C \quad \int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Интегралы некоторых элементарных функций.

$\int du = u + c$	$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ (α≠-1)
$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + c$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$, $\int e^u du = e^u + c$
$\int \sin u du = -\cos u + c$	$\int \cos u du = \sin u + c$
$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + c$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c$
$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c$	$\int \frac{du}{1+u^2} = arctgu + c$

Пример:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C \qquad \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

3.Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Основано на использовании свойств неопределенного интеграла:

$$\int\left(x^2-6x+3\right)dx=\frac{x^3}{3}-3x^2+3x+C$$

2. Метод замены переменной

Этот способ заключается в *переходе от данной переменной интегрирования к другой переменной* для упрощения подынтегрального выражения и приведения его к одному из табличных:

$$\int\sin^7 x\cos x dx=\left|\begin{matrix}\sin x=t\\ d\sin x=dt\\ \cos xdx=dt\end{matrix}\right|=\int t^7dt=\frac{t^8}{8}+C=\frac{\sin^8 x}{8}+C$$

3. Интегрирование по частям $\int$**udv = uv - $\int$vdu:**

Пример: $\int$xlnxdx

Решение:

обозначим lnx=u, тогда xdx=dv

Находим du=d(lnx)'=(lnx)'dx= v=$\int$xdx=

Используя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\int x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+C=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C$$

4.Понятие определенного интеграла

Определенный интеграл от непрерывной на отрезке [a;b] функции y=f(x) равен приращению первообразной y=F(x) для этой функции на указанном промежутке: $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ (Формула Ньютона – Лейбница)

Свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^b f(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$
5. $\int_a^a f(x)dx=0$

5. Методы решения определенного интеграла

1. Непосредственное интегрирование:

$$\int_0^1 \left(x^2-6x+3\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+3x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}-3+3-0=\frac{1}{3}$$

2. Метод замены переменной

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ может быть вычислен с помощью введения новой переменной, если выполнены следующие условия:

1. Функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b]
2. Отрезок [a,b] является множеством значений функции x=φ (t), определенной на отрезке [a,b] и имеющей на нём непрерывную производную
3. φ(α)=a,φ(β)=b

Тогда справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\cos xdx=\left|\begin{array}{l} \sin x=t \\ d\sin x=dt \\ \cos xdx=dt \\ x=0 \quad t=\sin 0=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \quad t=\sin\frac{\pi}{2}=1 \end{array}\right|=\int_0^1 t^7dt=\frac{t^8}{8}\Big|_0^1=\frac{1}{8}-0=\frac{1}{8}$$

3.Интегрирование по частям

Если функция u и v имеют непрерывные производные на отрезке [a,b], то для определенного интеграла справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

Пример: $\int_1^2 x\ln xdx$

Решение:

обозначим lnx=u, тогда xdx=dv

Находим du=d(lnx)’=(lnx)’dx= v=∫xdx=

Используя формулу интегрирования по частям, получаем:

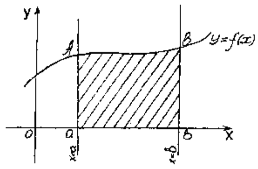
$$\int_1^2 x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\Big|_1^2=\left(\frac{2^2}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)\right)-\left(\frac{1^2}{2}\left(\ln 1-\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$=2\ln 2-1-0+\frac{1}{4}=\ln 4-\frac{3}{4}$$

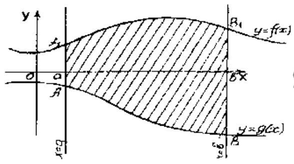
6. Применение определенного интеграла

Геометрический смысл определённого интеграла: как известно, определённый интеграл от неотрицательной непрерывной функции есть площадь соответствующей криволинейной трапеции. В этом заключается геометрический смысл определённого интеграла, на этом основано его применение к вычислению площадей плоских фигур.

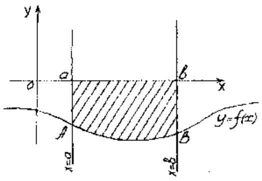
Основные случаи расположения плоской фигуры и соответствующие формулы площадей



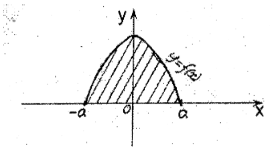
$$S=\int_a^b f(x)dx$$



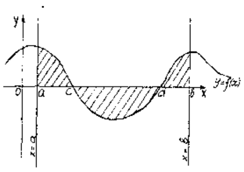
$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$



$$S=-\int_a^b f(x)dx$$



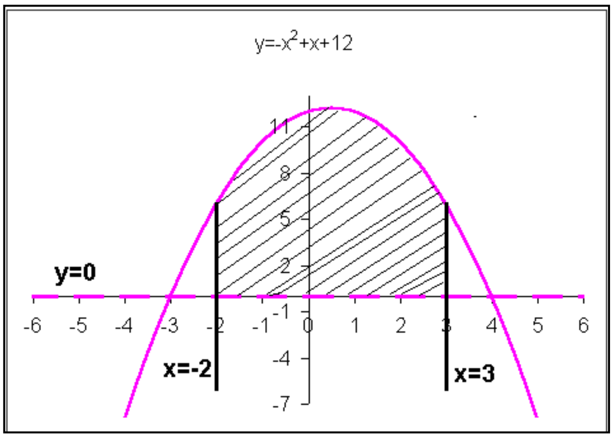
$$S=2\int_0^a f(x)dx$$



$$S=\int_a^c f(x)dx-\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx$$

Пример: Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2+x+12$, $x=-2$, $x=3$, $y=0$.

$y=-x^2+x+12$ – парабола, «ветви» направлены вниз, пересекает ось x в точках $x=-3$ и $x=4$.

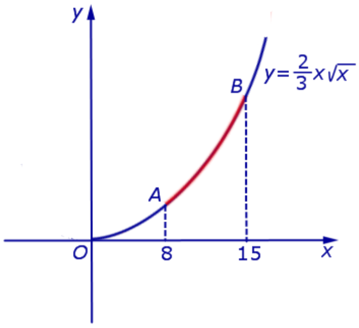


Данная плоская фигура представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь вычисляется по формуле:

$$S=\int_{-2}^{3}(\text{-x2}+x+12)dx=-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{3}+\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{3}+12x\Big|_{-2}^{3}=50\frac{5}{6}$$

Вычисление длины дуги кривой: $l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

Пример: Найти длину дуги графика функции $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $8 < x < 15$. Для вычисления длины дуги AB нужно, в соответствии с формулой для длины дуги графика функции, вычислить определенный интеграл:



$$l = \int_8^{15} \sqrt{1+\left[\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)'\right]^2}\,dx$$

Воспользовавшись свойствами степеней и таблицей производных, находим:

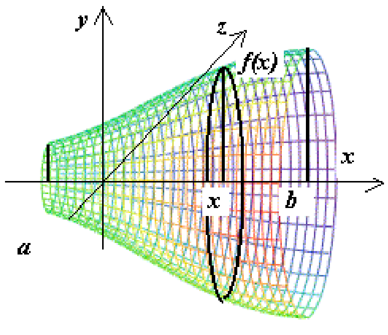
$$\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)' = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)' = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Подставляем в формулу и вычислим полученные интегралы при помощи таблицы неопределенных интегралов и формулы Ньютона - Лейбница:

$$l = \int_8^{15} \sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \int_8^{15} \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_8^{15} = \frac{2}{3}\left[16^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{74}{3}$$

Вычисление объёма тела вращения:

Объем тела, полученного при вращении криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции y = f (x), f (x) > 0, a < x < b, снизу – осью Ox , а с боков – отрезками прямых x = a и x =b , вокруг оси Ox:



$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

Контрольные вопросы для закрепления:

1. Дайте определение понятию «первообразной».
2. Какова формула вычисления неопределенного интеграла.
3. Назовите свойства неопределенного интеграла.
4. По какой формуле вычисляется интеграл от степенной функции?
5. Назовите методы интегрирования неопределенного интеграла, охарактеризуйте каждый из методов.
6. Раскройте суть формулы Ньютона-Лейбница.
7. Назовите свойства определенного интеграла.

8. Назовите методы решения определенного интеграла, охарактеризуйте каждый из них.
9. Исходя из того, что процесс интегрирования обратный процессу дифференцирования какие задачи можно решать на физический и геометрический смысл?
10. Каково практическое применение определенного интеграла?

Дифференциальные уравнения и их применения в медицинской практике

План:

1. Основные понятия и определения дифференциального уравнения
2. Методы решения дифференциальных уравнений
3. Применение дифференциальных уравнений для решения задач

1.Основные понятия и определения дифференциального уравнения

Уравнения, в которых неизвестными являются не только сами функции, но и их производные называются *дифференциальными уравнениями*.

Если в уравнение входит независимая переменная, неизвестная функция и её первая производная, то это уравнение называется *дифференциальным уравнением I-го порядка.*

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной неизвестной функции, входящей в это уравнение.

Решением дифференциального уравнения называют любую функцию при подстановке, которой в это уравнение получается тождество. Простейшим уравнением первого порядка является уравнение: $y' = f(x)$

-Что будет являться решением этого уравнения?

$y = \int f(x)dx = F(x) + C$ – это общее решение.

-Как же выглядит геометрически общее решение?

Геометрически общее решение представляет собой семейство интегральных кривых, т.е. совокупность линий, соответствующих различным значениям постоянной С.

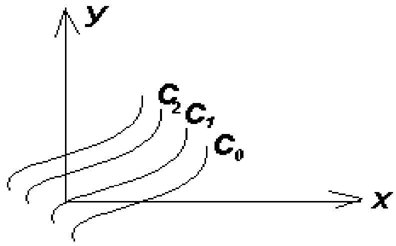


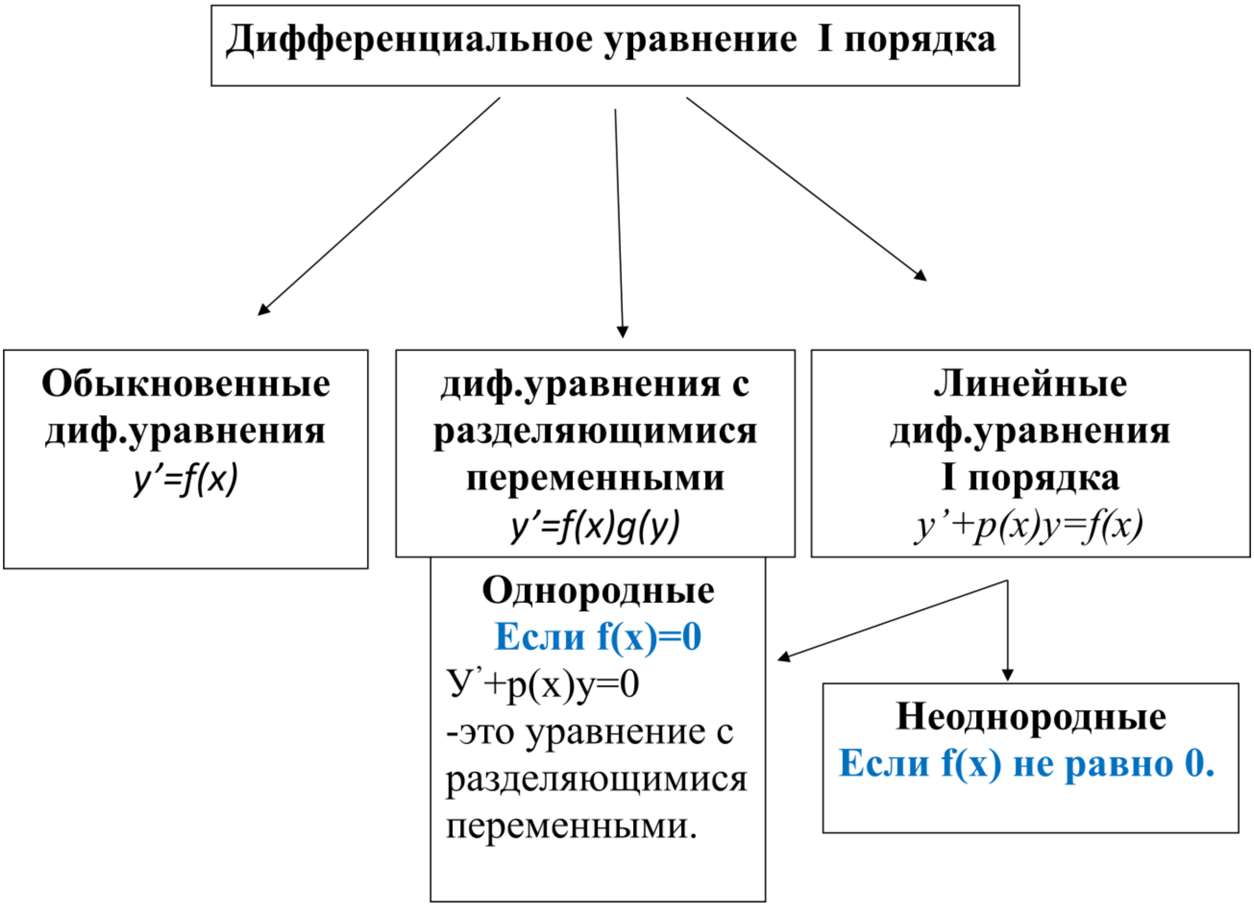
График решения дифференциального уравнения называют *интегральной кривой* этого уравнения.

Пример: $y' = 5$

Решение: $y = 5x + C$–общее решение диф.уравнения

Зададим начальные условия : $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ и подставим в общее решение соответственно вместо x и y.

Получаем $y = 5x + 1$-это частное решение дифференциального уравнения.



Методы решения дифференциальных уравнений

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение y'=f(x)

$$y=\int f(x)dx=F(x)+C$$

Пример: Решить дифференциальное уравнение *y'=5x+2*

$$y=\int(5x+2)dx=\frac{5x^2}{2}+2x+C$$

2. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными y'=f(x)g(y)

Решается это уравнение по шагам:

1. dy/dx=f(x)g(y)
2. dy/g(y)=f(x)dx
3. Интегрируем обе части выражения.
4. Находим первообразные.
5. Выражаем функцию у через х.

   Пример: Решить дифференциальное уравнение $y'=x^2\cdot y$

$$\frac{dy}{dx}=x^2\cdot y$$

$$\frac{dy}{y}=x^2dx$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int x^2dx$$

$$\ln y+C_1=\frac{x^3}{3}+C_2$$

Выражаем функцию у через х:

$$\ln y=\frac{x^3}{3}+C, где \quad C=C_2-C_1$$

$$y=e^{\frac{x^3}{3}+C}=C_0e^{\frac{x^3}{3}}, где \quad C_0=e^C$$

3. Линейное дифференциальное уравнение I порядка y'+p(x)y=f(x)

Если $f(x)=0$, то уравнение называется *линейным однородным уравнением:* $y'+p(x)y=0$

Решением данного уравнения является функция $y = Ce^{-\int p(x)dx}$

Пример: Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'+y2\cos x=0$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \Rightarrow \quad \int p(x)dx = \int 2cosxdx = 2\sin x \Rightarrow \quad y = Ce^{-2\sin x}$$

Если $f(x)\neq 0$, то уравнение называется *линейным неоднородным уравнением*: $y'+p(x)y=f(x)$

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}(C + \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx)$$

Пример: Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'+yx=3x$$

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}(C + \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx)$$

Обозначим: $p(x)=x$, $f(x)=3x$

$$e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int xdx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int 3xe^{\int xdx}dx = \int 3xe^{\frac{x^2}{2}}dx = 3\int e^{\frac{x^2}{2}}d\left(\frac{x^2}{2}\right) = 3e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(C + 3e^{\frac{x^2}{2}}) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 3$$

3 Применение дифференциальных уравнений для решения задач

Дифференциальные уравнения занимают важное место при решении задач физико-химического, фармацевтического и медико-биологического содержания. Пользуясь ими, мы устанавливаем связь между переменными величинами, характеризующими процесс или явление.

Решение любой задачи с помощью математического анализа можно разбить на три этапа:

1. перевод условий задачи на язык математики;
2. решение задачи;
3. оценка результатов.

Первая часть работы обычно заключается в составлении дифференциального уравнения и является наиболее трудной, так как общих методов составления дифференциальных уравнений нет и навыки в этой области могут быть приобретены лишь в результате конкретных примеров.

Закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток

Скорость растворения лекарственных форм вещества из таблеток пропорциональна количеству лекарственных форм вещества в таблетке. Установить зависимость изменения количества лекарственных форм вещества в таблетке с течением времени.

Обозначим через **m** количество вещества в таблетке, оставшееся ко времени растворения **t**. Тогда

$$dm/dt = -\kappa m,$$

где **k**-постоянная скорости растворения. Минус в уравнении означает, что количество лекарственных форм вещества с течением времени убывает.

Закон размножения бактерий с течением времени

Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий в данный момент. Установить зависимость изменения количества бактерий от времени.

Обозначим количество бактерий, имеющихся в данный момент, через **x**. Тогда

$$dx/dt = kx,$$

где **k** – коэффициент пропорциональности.

Закон роста клеток с течением времени

Для палочковидных клеток, у которых отношение поверхности клетки к её объёму сохраняется постоянным, скорость роста клетки ***dl/dt*** пропорциональна длине клетки **l** в данный момент:

$$dl/dt = (\alpha - \beta)\, l,$$

где α, β – постоянные, характеризующие процессы синтеза и распада.

Закон разрушения клеток в звуковом поле

Кавитация ультразвуковых волн проявляется в виде разрывов суспензионной среды и образования мельчайших пузырьков и пустот, плотность которых незначительна по сравнению с плотностью воды. Простейшие (бактерии, водоросли, дрожжи, лейкоциты, эритроциты) могут быть разрушены при кавитации, возникающей в интенсивном звуковом поле. Относительные скорости разрушения биологических клеток различных видов остаются постоянными в очень широком диапазоне частот. Эти скорости могут характеризовать относительную хрупкость клеток различных видов. Чтобы выразить это количественно, нужно определить скорость разрушения клетки в постоянном звуковом поле. Изучение этого вопроса показывает, что, пока по крайней мере 1% популяции остаётся неразрушенным, можно записать:

$$dN/dt = -RN,$$

где **N** – концентрация клеток; **t**–время; **R** - постоянная

Теория эпидемий

В теории эпидемий при условии, что изучаемое заболевание носит длительный характер, процесс передачи инфекции значительно более быстрый, чем течение самой болезни, и зараженные особи не удаляются из колонии и передают при встречах инфекцию незараженным особям.

Пусть в начальный момент t=0, a – число зараженных, b – число незараженных особей, x(t), y(t) – соответственно число зараженных и незараженных особей к моменту времени t. В любой момент времени t для промежутка, меньшего времени жизни одного поколения, имеет место равенство

$$x+y=a+b \quad (1)$$

При этих условиях нужно установить закон изменения числа незаражённых особей с течением времени, т.е. найти **y=f(x)**.

Так как инфекция передаётся при встречах зараженных особей с незараженными, то число незараженных особей будет убывать с течением времени пропорционально количеству встреч между зараженными и незараженными особями. Для промежутка времени **dt** $dy=-\beta xy$,

откуда $dy/dt= - \beta xy$, где **β** – коэффициент пропорциональности. Подставив в это уравнение значение **x** из равенства (1), получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$dy/dt= - \beta y\,(a+b-y)$$

Внутривенное введение глюкозы

При внутривенном введении глюкозы с помощью капельницы скорость поступления глюкозы в кровь постоянна и равна **C.**

В крови глюкоза разлагается и удаляется из кровеносной системы со скоростью, пропорциональной имеющемуся количеству глюкозы.

Дифференциальное уравнение, описывающее данный процесс:

$$\mathbf{dx/dt=c-\alpha x}, \text{ где}$$

x-количество глюкозы в крови в текущий момент времени;

c-скорость поступления глюкозы в кровь;

α-положительная постоянная

Пример: Составьте дифференциальное уравнение и найдите частные решения: Концентрация лекарственного препарата в крови уменьшается вследствие выведения вещества из организма. Скорость уменьшения концентрации пропорциональна концентрации вещества в данный момент. Определить зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, если в начальный момент времени она была равна 0,2 мг/л, а через 23 часа уменьшилась вдвое.

Решение: Уравнение, описывающее этот процесс:

$$\frac{dm}{dt}=-km\ ,$$

где $\frac{dm}{dt}$ - скорость выведения вещества из организма,
m - концентрация лекарственного препарата в крови в данный момент времени; k - коэффициент пропорциональности

Решая полученное уравнение, получаем:

$$\frac{dm}{m}=-kdt$$

$\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}=-k\int_0^t dt$, где m_0-концентрация вещества в крови в начальный момент времени t=0, m – текущая концентрация вещества в крови в момент времени t.

$$\ln m\Big|_{m_0}^{m}=-kt\Big|_0^t \quad ,\ln m-\ln m_0=-kt \quad ,\ln\frac{m}{m_0}=-kt$$

Потенцируя, получим: $m=m_0e^{-kt}$

По условию задачи m_0=0,2 мг/л, m=m_0/2 мг/л, t=23 ч.

Подставляем и находим:

$$\frac{m_0}{2}=m_0e^{-k23} \quad ,\frac{1}{2}=e^{-k23} \quad ,\ln 0{,}5=\ln e^{-k23}$$

$$,\ln 0{,}5=-23k \quad ,k=\frac{\ln 0{,}5}{-23}=\frac{-0{,}693}{-23}=0{,}03$$

Зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, описывается следующим законом:

$$\boxed{m=m_0e^{-0{,}03t}}$$

Контрольные вопросы для закрепления:

1. Дайте понятие дифференциальному уравнению, его решению.
2. Назовите методы решения дифференциальных уравнений, охарактеризуйте каждый.
3. Приведете примеры обыкновенного дифференциального уравнения, уравнения с разделяющими переменными, линейного.
4. Приведите примеры дифференциального уравнения первого, второго, третьего порядка.
5. Каково практическое применение дифференциальных уравнений.

Основные понятия дискретной математики. Теория вероятности.

Случайные события, понятие вероятности

План:

1.Основные понятия комбинаторики

2.Теория вероятностей

2.1.Понятие теории вероятности, этапы развития

2.2. Случайные события и операции над ними

2.3.Понятие вероятности

2.4.Основные теоремы вычисления вероятности

1.Основные понятия комбинаторики

Комбинаторикой называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Для формулировки и решения комбинаторных задач используют различные модели *комбинаторных конфигураций*.

Примерами комбинаторных конфигураций являются:

Отличающиеся друг от друга порядком наборы, составленные из всех элементов данного конечного множества, называются *перестановками* этого множества.

Пример: Множество, состоящее из трех элементов {1,2,3}, имеет следующие перестановки: (1,2,3), (1,3,2), (2,3,1), (2,1,3), (3,2,1), (3,1,2). Число всех перестановок множества из n элементов обозначается P_n.

Теорема: (о числе перестановок). *Число перестановок P_n определяется по формуле*

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

где n! = 1 • 2 • 3 •... • n.

Задача: Сколькими различными маршрутами можно навестить больного по 5 адресам?

Решение: Занумеруем адреса цифрами от 1 до 5. Каждому маршруту можно сопоставить один из наборов, состоящих из этих пяти цифр, например, (2,5,3,4,1). Такой набор означает, что сначала выбирается второй адрес, затем пятый, третий, четвертый и первый. Всего различных маршрутов, т. е. отличающихся порядком наборов пяти цифр будет 5! = 120.

Упорядоченные наборы, состоящие из k различных элементов, выбранных из данных n элементов, называются *размещениями* из n элементов по k.

Размещения могут отличаться друг от друга, как элементами, так и порядком.

Пример: Различными размещениями множества из трех элементов {1,2,3} по два будут наборы (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2).

Число всех размещений из n элементов по *k*обозначается A_n^k.

При $k = n$ число размещений совпадает с числом перестановок.

Теорема: (о числе размещений) *Число размещении из n элементов по k определяется по формуле*

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Задача: Студентам надо сдать 4 экзамена за 8 дней. Сколькими способами можно составить расписание сдачи экзаменов

Решение: Занумеруем дни сдачи экзаменов цифрами 1,2,.. .,8. Составлять различные расписания можно следующим образом. Сначала выберем дни для сдачи экзаменов, например, (2,4,5,7), а затем порядок сдачи экзаменов. Таким образом, нужно составить различные наборы четырех чисел из восьми, которые отличаются друг от друга не только элементами, но и порядком. Таких наборов 4: 8*7*6*5 = 1680.

Неупорядоченные наборы, состоящие из *k* элементов, взятых из данных *n* элементов, называются *сочетаниями* из n элементов по *k*.

Сочетания отличаются друг от друга только элементами.

Пример: Для множества {1,2,3} сочетаниями по 2 элемента являются {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}.

Число всех сочетаний из *n* элементов по *k*обозначается C_n^k

Теорема: (о числе сочетаний) *Число сочетаний из n элементов по k определяется по формуле*

$$\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Задача: В хоккейном турнире участвуют 6 команд. Каждая команда должна сыграть с каждой одну игру. Сколько игр сыграно в турнире?

Решение: Различные пары команд образуют сочетания из 6 по 2, поскольку порядок среди двух команд, играющих в одной игре, нам безразличен. Следовательно, число игр будет равно $C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$

2.Теория вероятностей

2.1.Понятие теории вероятности, этапы развития

Теория вероятностей - это математическая наука, изучающая закономерности массовых случайных событий.

Развитие теории вероятностей с момента зарождения этой науки и до настоящего времени было несколько своеобразным.

На первом этапе истории этой науки она рассматривалась как занимательный “пустячок”, как собрание курьезных задач, связанных в первую очередь с азартными играми в кости и карты

Возникновение теории вероятностей как науки. К середине, XVII в. вероятностные вопросы и проблемы, возникающие в статистической практике, в практике страховых обществ, при обработке результатов наблюдений и в других областях, привлекли внимание ученых, так как они стали актуальными вопросами. В первую очередь это относится к Б. Паскалю, П. Ферма и Х. Гюйгенсу. В этот период вырабатываются первые специфические понятия, такие, как математическое ожидание и вероятность (в форме отношения шансов), устанавливаются и используются первые свойства вероятности: теоремы сложения и умножения вероятностей.

В это время теория вероятностей находит свои первые применения в демографии, страховом деле, в оценке ошибок наблюдения, широко используя при этом понятие вероятности.

Классическое определение вероятности. Следующий период начинается с появления работы Я. Бернулли "Искусство предположений" (1713), в которой, впервые была строго доказана первая предельная теорема - простейший случай закона больших чисел. К этому периоду, который продолжался до середины XIX в., относятся работы Муавра, Лапласа, Гаусса и др. В центре внимания в это время стоят предельные теоремы. Теория вероятностей начинает широко применяться в различных областях естествознания. И хотя в этот период начинают применяться различные понятия вероятности (геометрическая вероятность, статистическая вероятность), господствующее положение занимает, в особенности после работ Лапласа, так называемое классическое определение вероятности.

Следующий период развития теории вероятностей связан прежде всего с Петербургской математической школой.

За два столетия развития теории вероятностей главными ее достижениями были предельные теоремы. Но не были выяснены границы их применимости и возможности дальнейшего обобщения. Наряду с огромными успехами, достигнутыми теорией вероятностей в предыдущий период, были выявлены и существенные недостатки в ее обосновании, это в большой мере относится к недостаточно четким представлениям о вероятности.

Строгое логическое обоснование теории вероятностей произошло в XX в. и связано с именами советских математиков С. Н. Бернштейна и А. Н. Колмогорова.

Возникновение и развитие теории вероятностей продиктовано необходимостью ее применениям, начиная от хозяйственно-прикладных вопросов и заканчивая самыми тонкими теоретическими вопросами теории информации и теории случайных процессов.

2.2. Случайные события и операции над ними

Случайным называется событие наступление, которого нельзя гарантировать.

Рассмотрим основные понятия теории вероятности:

Испытанием называется совокупность условий, при котором может произойти данное случайное событие.

Событие – это факт, который при осуществлении определенных условий может произойти или нет. События обозначают большими латинскими буквами A, B, C…

- Испытание - подбрасывание монеты; события – монета упала «орлом» или «решкой».
- Испытание - подбрасывание кубика; события – выпало 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков (и другие).

Событие, всегда осуществляющееся при проведении испытания, называют *достоверным событием.*

Когда событие не может произойти в результате испытания, его называют *невозможным*.

Под *случайным событием,* связанным с некоторым опытом, понимается всякое событие, которое при осуществлении этого опыта либо происходит, либо не происходит.

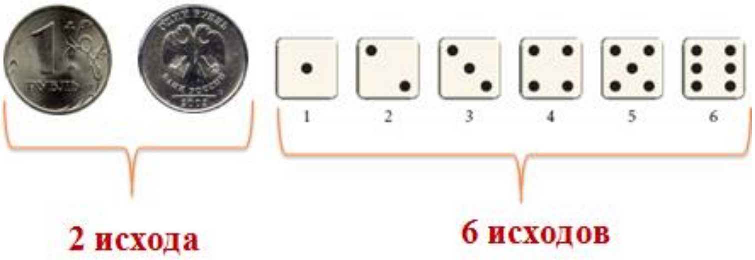
События называются *несовместными,* если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого.

События называются *совместными*, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого.

События называются *равновозможными*, если нет основания считать, что одно из них происходит чаще, чем другое.

События образуют полную *группу событий,* если в результате испытания обязательно произойдет, хотя бы одно из них и любые два из них несовместны.

События, входящие в полную группу попарно несовместных и равновозможных событий, называются *исходами*, или *элементарными событиями*.



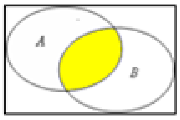
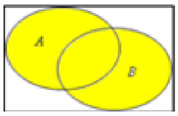
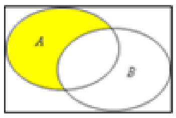
Однозначные исходы предполагают единственный результат того или иного события: смена дня и ночи, смена времени года и т.д.

Неоднозначные исходы предполагают несколько различных результатов того или иного события: при подбрасывании кубика выпадают разные грани; выигрыш в Спортлото; результаты спортивных игр.

Частным случаем событий, образующих полную группу, являются противоположные события.

Два несовместных события А и $\overline{A}$ (не А) называются *противоположными*, если в результате испытания одно из них должно обязательно произойти.

Операции над событиями

Определение	Изображение на диаграммах Эйлера-Вена	Пример
Произведением двух событий **А** и **В** называется событие **С**, происходящее тогда, когда одновременно происходят оба события А и В		**А** - вынуть белый шар, **В** - вынуть шар с четным номером, $C = A \cdot B$ - вынуть белый шар с четным номером
Суммой двух событий **А** и **В** называют событие **С**, происходящее тогда когда происходит хотя бы одно из событий А или В		**А** - вынуть белый шар, **В** - вынуть черный шар, А+В - вынуть белый или черный шар
Разностью двух событий **А** и **В** называется событие **С**, происходящее тогда, когда происходят событие А, но не происходит событие В		**А** – вынуть шар с четным номером, **В** - вынуть шар кратный 3, А-В – вынуть шары с номерами 2, 4, 8, 10 (четные, но не делящиеся на 3)

2.3. Понятие вероятности

Случайные события реализуются с различной возможностью. Одни чаще, другие реже. Для количественной оценки возможностей реализации события вводится понятие *вероятности события*.

Вероятность события – это число, характеризующее степень возможности появления событий при многократном повторении события.

Вероятность является одним из основных понятий тории вероятности. Существует несколько определений этого понятия.

Классическое определение вероятности

Р (А)=$\frac{m}{n}$, где m – число благоприятных исходов, n – число всех исходов.

Свойства вероятности:

1. Р(А)= 0, если А – невозможное событие
2. Р(А)=1, если А – достоверное событие
3. Вероятность случайного события: $0 \geq P(A) \geq 1$

Статистическое определение вероятности

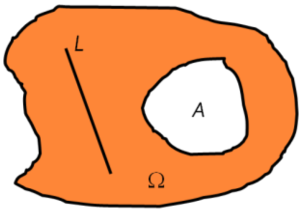
Вероятность случайного события приближенно равна частоте этого события, полученной при проведении большого числа случайных экспериментов:

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

где N_A - число испытаний, в которых наступило событие А, N – общее число испытаний.

Геометрическое определение вероятности

Если предположить, что попадание в любую точку области Ω равновозможно, то вероятность попадания случайной точки в заданное множество *A* будет равна отношению площадей:



$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

Можно определить геометрическую вероятность в пространстве и на прямой:

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}; P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}$$

2.4.Основные теоремы вычисления вероятности

Зная вероятности одних событий, можно вычислить вероятности других событий, если они связаны между собой.

1. Теорема сложения вероятностей для несовместных событий

Теорема: Вероятность наступления одного из двух несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий Р(А+В)=Р(А)+Р(В)

Пример: Мишень состоит из трех зон. Для данного стрелка вероятность попасть в первую зону равна 0,18, во вторую зону – 0,24, в третью зону – 0,33. Определить вероятность поражения мишени при одном выстреле.

Решение: Мишень будет поражена, если стрелок попадет или в первую (событие А1) или во вторую (событие А2) или в третью (событие А3) зону, т.е. надо вычислить:

Р(А1+А2+А3)=Р(А1)+Р(А2)+Р(А3) = 0,18+ 0,24+0,33=0,75.

2. Теорема умножения вероятностей для независимых событий

Теорема: Вероятность произведения двух независимых событий называют произведение вероятностей этих событий: Р(АВ)=Р(А)*Р(В)

Пример: Медицинская сестра обслуживает в палате двух больных. Вероятность того, что первому больному потребуется помощь в течении часа равна - 0,2, второму -0,3. Определить вероятность того, что в течении часа обоим больным потребуется помощь медицинской сестры.

Решение: А – событие, что потребуется помощь первому больному, Р(А)=0,2. В-событие того что потребуется помощь второму больному в течении часа, P(B)=0,3. Событие А не зависит от события В. Вероятность вычисляется по формуле: P(AB)=P(A)*P(B)=0,2*0,3=0,06

3. Теорема умножения вероятностей для зависимых событий

Теорема: Вероятность произведения двух зависимых событий А и В равна произведению одного их них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие осуществилось:

P(A и B)=P(A*B)=P(A)*P(B/A)

Пример: В читальном зале имеется 6 учебников по информатике, из которых 3 в переплете. Библиотекарь наудачу взял 2 учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.

Решение: Вероятность наступления события A_1 в соответствии с классическим определением вероятности: $P(A_1) = m / n = 3/6 = 0,5$.

$P(A_2 / A_1) = 2/5 = 0,4$.Тогда искомая вероятность наступления события А:$P(A) = 0,5 * 0,4 = 0,2$.

4. Теорема сложения вероятностей для совместных событий

Теорема: Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления: P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A*B)

Пример: Два студента читают книгу. Первый студент дочитает книгу с вероятностью – 0,6; второй – 0,8. Найти вероятность того, что книга будет прочитана хотя бы одним из студентов.

Решение: Вероятность события АВ (оба студента дочитали книгу):

P (AB) = P (A) * P (B) = 0,6 * 0,8 = 0,48.

Тогда вероятность события, что книга будет прочитана хотя бы одним из студентов: P (A + B) = 0,6 + 0,8 - 0,48 = 0,92.

5. Формула полной вероятности

Теорема: Вероятность события А, которое может наступить только при условии появления одного из событий H_1, H_2, $\ldots H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из событий H_1, H_2, $\ldots H_n$ на соответствующую условную вероятность события А:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+\ldots+\ldots P(H_n)P(A/H_n)$$

Пример: В аптеку поступило лекарство с трех фармацевтических заводов. Пусть от первого завода поступило 20 препаратов, от второго - 10 препаратов и от третьего - 70. Вероятности брака на заводах соответственно равны 0,02; 0,03 и 0,05. Определить вероятность попадания в аптеку бракованного препарата.

Решение: Вероятности событий будут равны $P(A_1) = 0,2$; $P(A_2) = 0,1$;

$P(A_3) = 0{,}7$. Используя формулу полной вероятности, находим:
$P(B) = 0{,}2 \times 0{,}02 + 0{,}1 \times 0{,}03 + 0{,}7 \times 0{,}05 = 0{,}042$.

6. Вероятность гипотез. Формулы Байеса

Теорема: Если существуют n попарно несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу, и известны условные вероятности события А, то можно найти вероятности того, что событие А произошло при условии появления некоторого события B_i по формуле:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) * P(B / A_i)}{P(B)}$$

Пример: Предположим, что 5 мужчин из 100 и 25 женщин из 10000 являются дальтониками. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность, что это мужчина?

Решение:

H1 = {мужчина} , H2 = {женщина}, P(H1) = P(H2) = 0,5

A = {человек страдает дальтонизмом}

A/H1 = {мужчина страдает дальтонизмом}, P(A/H1) = 0,05

A/H2 = {женщина страдает дальтонизмом} , P(A/H2) = 0,0025

По формуле полной вероятности:

P(A) = P(H1)P(A/H1) + P(H2)P(A/H2) = (0,5)*(0,05) + (0,5)*(0,0025) =
=0,025 + 0,00125 = 0,02625

По формуле Байеса:

P(H1/A) = P(H1)P(A/H1)/P(A) = (0,025)/(0,02625) = 2500/2625 = 20/21

Контрольные вопросы для закрепления:

1.Комбинаторика: перестановки, размещения, сочетания.
2.Классификация случайных событий.
3.Алгебра событий (сложение, умножение, вычитание).
4.Статистическое, классическое, геометрическое определение вероятности.
5.Теорема сложения и умножения вероятностей.
6.Формула полной вероятности (пример).
7.Формула Байеса (пример).

Основные понятия дискретной математики. Теория вероятности.

Случайные величины, закон распределения и числовые характеристики случайной величины

План:

1. Случайные величины
2. Закон распределения случайной величины
3. Числовые характеристики случайной величины
4. Нормальный закон распределения. Вычисление вероятности при нормальном распределении (правило трех сигм)
5. Закон больших чисел

1.Случайные величины

Случайная величина является одним из основных понятий теории вероятностей. Роль случайной величины, как одного из основных понятий теории вероятностей, впервые была чётко осознана П. Л. Чебышевым, который обосновал общепринятую на сегодня точку зрения на это понятие

Под *случайной величиной*, связанной с некоторым опытом, понимается всякая величина, которая при осуществлении этого опыта принимает то или иное числовое значение.

Случайной называют величину, которая принимает в результате испытания то или иное возможное значение, заранее неизвестное, меняющееся от испытания к испытанию и зависящее от случайных обстоятельств.

Примеры случайных величин:

А) количество бракованных изделий в определенной партии,

Б) величина надоя молока от одной коровы в течение года,

В) количество солнечных пятен с площадью, большей некоторого определенного значения, зарегистрированных астрономом в течение дня на солнечном диске,

Г) число лепестков в цветке сирени,

Д) количество дорожно-транспортных происшествий в городе в течение суток.

Е) Температура пациента

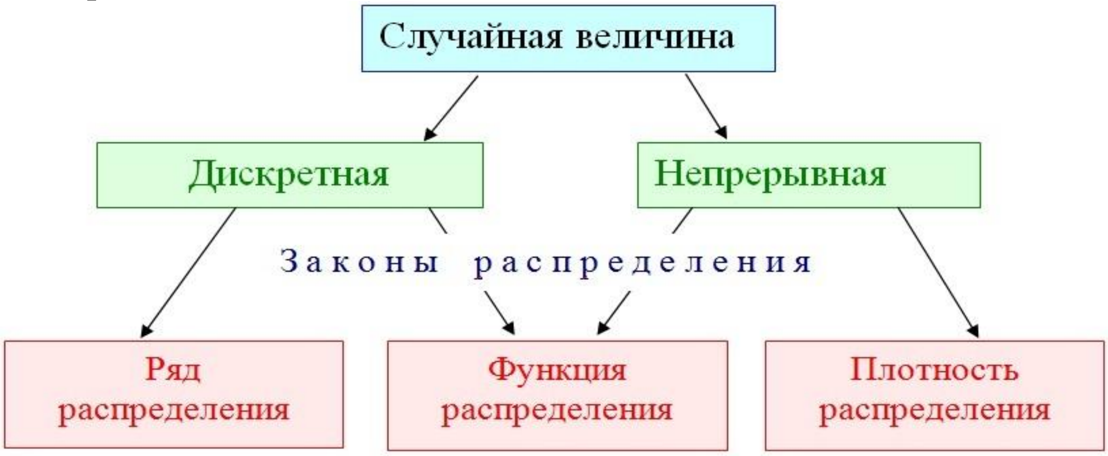
Случайная величина	
Дискретная	Непрерывная
случайная величина, которая принимает счетное множество значений. (элементы можно подсчитать)	случайная величина, которая может принимать любые значения в определенном интервале (несчетное бесконечное множество)
число проб лабораторных исследований	температура пациента за определенный промежуток времени

Для полной характеристики случайной величины необходимо, прежде всего, знать те значения, которые она может принимать. Но этого, разумеется, недостаточно. Помимо этого нужно знать, с какой вероятностью случайная величина принимает то или иное значение.

2.Закон распределения случайной величины

Случайная величина считается заданной, если известен закон распределения случайной величины.

Законом распределения случайной дискретной величины называется соотношение между значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

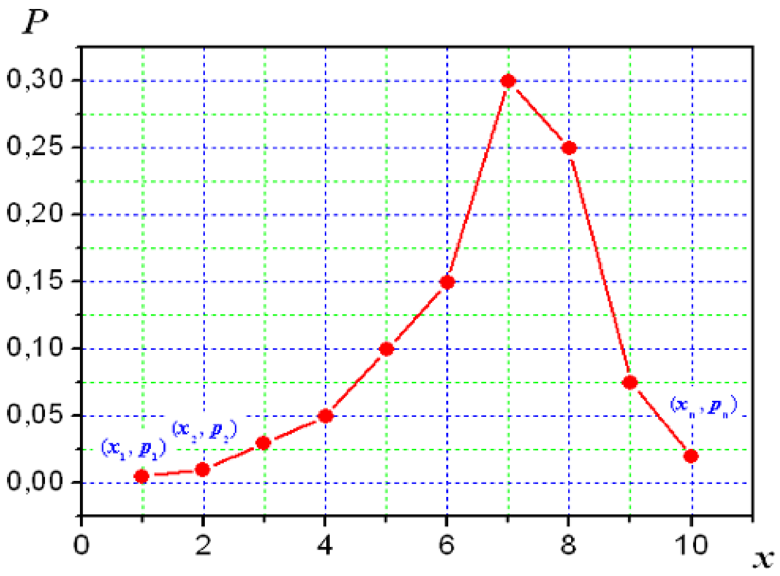


Закон распределения случайной дискретной величины

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан таблицей (ряд распределения), в графическом и аналитическом виде.

Значения случайной величины x_i	X_1	X_2	…	X_n
Вероятности значений p_i	P_1	P_2	…	P_n

Для наглядности ряд распределения можно представить в графическом виде, где по оси абсцисс откладываются значения случайной величины, а по оси ординат – вероятность этих значений.



Многоугольник распределения вероятностей

Закон распределения может быть задан аналитически (формулой) $P(X = x_i) = \phi(x_i)$.

а) биномиальное распределение: $P_n(X=k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k}$,

б) распределение Пуассона:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

в) функция распределения F(x), определяющей для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т.е.

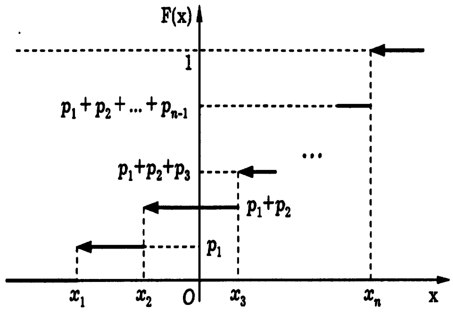
Функция распределения и её свойства

Функция распределения определяет вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее фиксированного действительного числа x $F(x) = P(X < x)$., т.е.

$$\boldsymbol{F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < x_1, \\ p_1, & \text{при } x_1 \le x < x_2, \\ p_1 + p_2, & \text{при } x_2 \le x < x_3, \\ \ldots, & \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}, & \text{при } x_{n-1} \le x < x_n, \\ 1, & \text{при } x \ge x_n. \end{cases}$$

У дискретной случайной величины функция распределения ступенчатая, разрывна и возрастает скачками при переходе через каждое значение x_i.



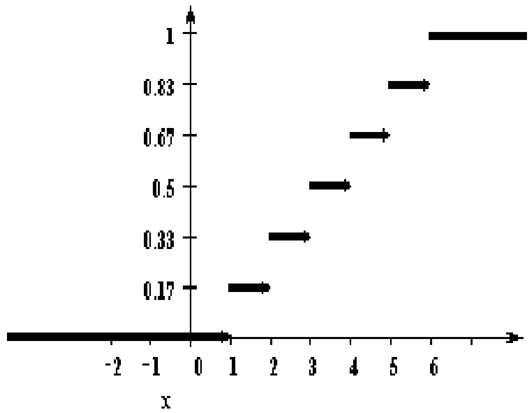
Функцию распределения F(x) иногда называют *интегральной функцией распределения* или *интегральным законом распределения*.

Функцию F(x) можно получить, суммируя значения случайной величины, которая меньше x_i.

Пример: Для случайного числа очков, выпавших при одном бросании игральной кости, распределение, функция распределения и график функции распределения имеют вид:

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при -\infty < x < 1,\\ \frac{1}{6}, & при\ 1 \le x < 2,\\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}, & при\ 2 \le x < 3,\\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}, & при\ 3 \le x < 4,\\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}, & при\ 4 \le x < 5,\\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}, & при\ 5 \le x < 6,\\ 1, & при\ x \ge 6 \end{cases}$$



Свойства функции распределения:

1.Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей:

$$0 \le F(x) \le 1$$

2.Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция на всей числовой оси:

$$F(x_2) \ge F(x_1), если \qquad x_2 > x_1$$

3.На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности – единице, т.е.

$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$

Непрерывной случайной величиной называется случайная величина, все возможные значения которой целиком заполняют некоторый промежуток на числовой прямой.

Случайная величина X называется *непрерывной*, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.

При описании непрерывной случайной величины невозможно выписать и пронумеровать все её значения, принадлежащие даже достаточно узкому интервалу. Эти значения образуют несчётное множество.

Если X – непрерывная случайная величина, то равенство X $=x$ представляет собой, как и в случае дискретной случайной величины, некоторое случайное событие, но для непрерывной случайной величины это событие можно связать, лишь с вероятностью, равной нулю, что, однако, не влечёт за собой невозможности события.

Функция распределения:

$F(x) = P(X < x)$ $\qquad\qquad$ $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

В этих случаях практически невозможно установить, произошло событие или нет, так как измерения величин проводятся с ограниченной точностью, и в качестве результата измерения можно фактически указать лишь границы более или менее узкого интервала, внутри которого находится измеренное значение. Поэтому, применительно к абсолютно непрерывным случайным величинам, говорят только о вероятности попасть в промежуток.

Задание непрерывной случайной величины с помощью функции распределения не является единственным.

Плотностью вероятности (*плотностью распределения* или *плотностью*) $P(X)$ непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения:

$$\rho(x) = F'(x)$$

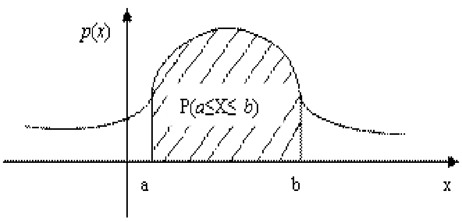
Плотность вероятности $P(X)$, как и функция распределения $F(X)$, является одной из форм закона распределения, но в отличие от функции распределения она существует только для *непрерывных* случайных величин.

Плотность вероятности иногда называют дифференциальной функцией, или дифференциальным законом распределения. График плотности вероятности называется кривой распределения.

Свойства дифференциальной функции распределения:

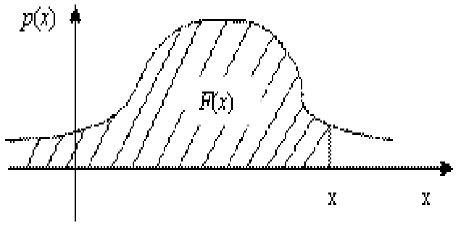
1.Для любых x дифференциальная функция распределения неотрицательна, т.е. **f(x) ≥0**

2.Для дифференциальной функции распределения имеет место равенство:



$$P(a \le x \le b) = F(b) - F(a) = \int_a^b \rho(x)dx$$

3 Интегральная функция распределения случайной величины может быть выражена через функцию плотности вероятностей по формуле:



$$F(x) = \int_x^{\infty} \rho(x)dx$$

4.Для дифференциальной функции распределения имеет место равенство (свойство - *условие нормировки плотности вероятностей*)

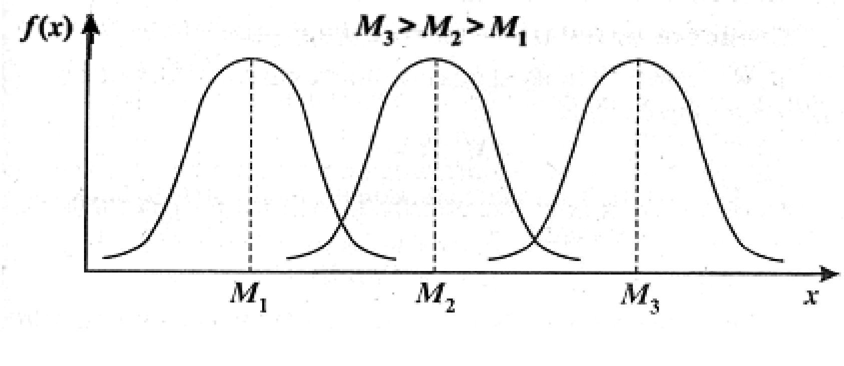
$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1$$

3. Числовые характеристики случайной величины

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Но при решении ряда практических задач нет необходимости знать все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности, а удобнее пользоваться некоторыми количественными показателями, которые дают достаточную информацию о случайной величине. Такие показатели называются *числовыми характеристиками случайной величины*. Основными из них являются: *математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.*

Математическое ожидание

Математическое ожидание характеризует положение случайной величины на числовой оси, определяя некоторое среднее значение, около которого сосредоточены все возможные значения случайной величины. Физический смысл математического ожидания как характеристики положения центра распределения случайно величины.



Математическое ожидание дискретной случайной величины равно сумме произведений всех возможных ее значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Математическое ожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины)

Математическое ожидание для непрерывной случайной величины:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx$$

Дисперсия

Дисперсия характеризует рассеяние (отклонение) случайно величины относительно математического ожидания.

Дисперсией дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от её математического ожидания M(X) :

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Дисперсия для непрерывной случайной величины

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 \rho(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho(x)dx - (M(X))^2$$

Размерность дисперсии равна квадрату случайной величины, и ее неудобно использовать для характеристики разброса, поэтому удобнее применять корень квадратный из дисперсии – *среднее квадратическое отклонение*. Эта величина дает представление о размахе колебаний случайной величины около математического ожидания.

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

Свойства основных числовых характеристик

MX	**DX**	σ_x
$Mc = c$	$Dc = 0$	$\sigma_c = 0$
$McX = cMX$	$DcX = c^2 DX$	$\sigma_{cX} = \vert c \vert \sigma_x$
$M(X \pm Y) = MX \pm MY$ X,Y – независимые случайные величины	$D(X \pm Y) = DX + DY$ X,Y – независимые случайные величины	$\sigma(c + X) = \sigma_x$

4.Нормальный закон распределения. Вычисление вероятности при нормальном распределении (правило трех сигм)

Одним из наиболее важных и часто используемых распределений непрерывных случайных величин является *нормальное распределение.*

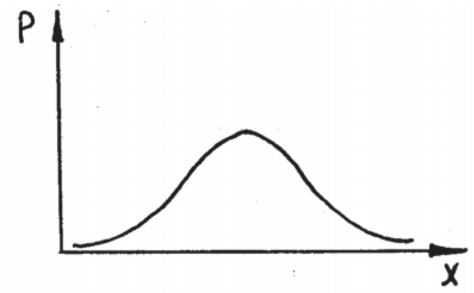
В теории вероятности широко используется нормальный закон распределения.

Если случайная величина подвержена достаточно большому числу независимых «небольших» воздействий, то можно ожидать, что эта случайная величина будет иметь распределение, близкое к нормальному.

Однако в тех случаях, когда имеет место воздействие одного фактора и значительное его превышение над другими более мелкими факторами, нельзя использовать закон распределения.

Нормальное (гауссово, симметричное, колоколообразное) распределение – описывает совместное воздействие на изучаемое явление небольшого числа случайно сочетающихся факторов (по сравнению с общей суммой факторов), число которых неограниченно велико.

Встречается в природе наиболее часто, за что и получило название «нормального». Характеризует распределение непрерывных случайных величин.



x - значения случайной величины;

p - вероятность появления данного значения

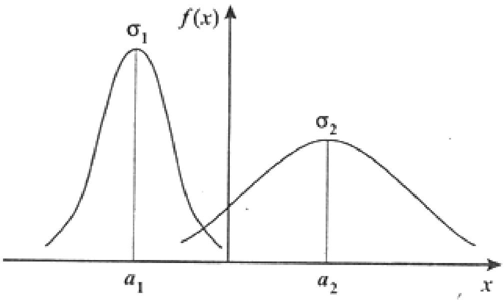
в совокупности.

Непрерывная случайная величина X имеет нормальное распределение вероятностей с параметром a и σ, если ее плотность распределения задается формулой:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a – математическое ожидании случайной величины;

σ^2 – дисперсия случайной величины; σ – среднее квадратическое отклонение.



Графики плотностей нормального распределения
с разными математическими ожиданиями и дисперсиями

Основные свойства функции распределения

1. Область определения функции f(x) вся числовая ось.

2. f(x) >0
3. $Lim_{x\to 0} f(x) = 0$
4. Точка x=a – max , f(a)=$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$
5. График функции симметричен относительно прямой x=a
6. Кривая нормального распределения в точках x=a- σ и x=a+ σ имеет перегиб

а – характеризует положение графика на числовой оси, σ -степень сжатия или растяжения графика относительно оси а. Площадь под кривой во всех случаях должна быть равна 1 (условие нормировки).

Вычисление вероятности при нормальном распределении (правило трех сигм)

При рассмотрении нормального закона распределения выделяется важный частный случай, известный, как правило, трех сигм

P (a- σ <x< a+ σ) =68,26%

P (a- 2σ <x< a+ 2σ) =95,44%

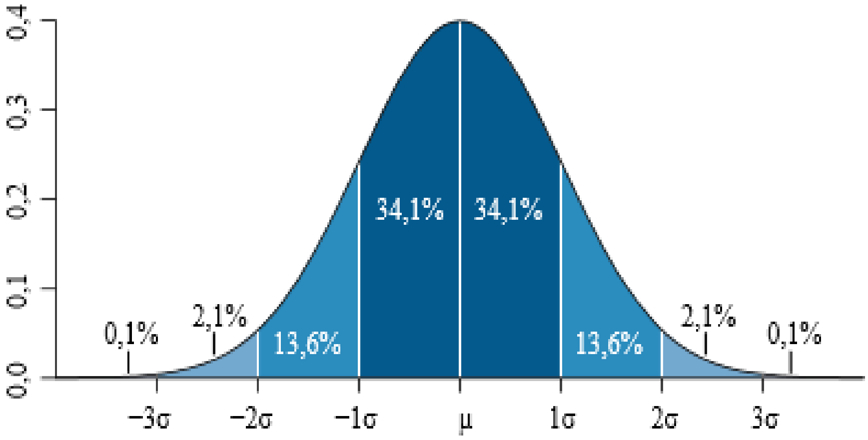
P (a- 3σ <x< a+ 3σ) =99,74%, т.е.

68,3 % всех вариант отклоняются от своей средней не более, чем на σ

95,4% вариант находятся в пределах X ± 2σ

99,7% вариант находятся в пределах X ± 3σ

Отклонение параметра от его средней арифметической в пределах σ расценивается как норма, субнормальным считается отклонение в пределах ± 2σ и патологическим - сверх этого предела, т.е. > ± 2σ.



На практике считается, что если для какой – либо случайной величины выполняется правило трех сигм, то эта случайная величина имеет нормальное распределение.

5.Закон больших чисел

Основными понятиями теории вероятностей являются понятия *случайного события* и *случайной величины*. При этом предсказать заранее результат испытания, в котором может появиться или не появиться то или иное событие или какое-либо определенное значение случайной величины, невозможно, так как исход испытания зависит от многих случайных причин, не поддающихся учету.

Однако при неоднократном повторении испытаний наблюдаются закономерности, свойственные массовым случайным явлениям. Эти закономерности обладают свойством *устойчивости*. Суть этого свойства состоит в том, что конкретные особенности каждого отдельного случайного явления почти не сказываются на среднем результате большой массы подобных явлений, а характеристики случайных событий и случайных величин, наблюдаемых в испытаниях, при неограниченном увеличении числа испытаний становятся практически не случайными.

Пусть производится большая серия однотипных опытов. Исход каждого отдельного опыта является случайным, неопределенным. Однако, несмотря на это, средний результат всей серии опытов утрачивает случайный характер, становится закономерным.

Для практики очень важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название *закона больших чисел*.

Под *законом больших чисел* понимают группу близких по содержанию теорем теории вероятностей, указывающих условия возникновения тех или иных закономерностей в результате действия большого числа случайных факторов.

С вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточно большом числе независимых опытов частота появления события как угодно мало отличается от его вероятности в отдельном опыте.

В случаях, когда вероятность события неизвестна, закон больших чисел позволяет принять за вероятность события его частоту, вычисленную при достаточно большом числе опытов.

При неограниченном возрастании числа независимых, имеющих конечную дисперсию и проводимых в одинаковых условиях опытов средняя арифметическая наблюдаемых значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию.

Пример: В связи с тем, что частота рождений мальчиков при достаточно большом числе наблюдений за рождаемостью оказывается близкой к числу 0,511, именно это число принимается за вероятность рождения мальчика. Знание этой вероятности позволяет делать серьёзные демографические прогнозы.

Контрольные вопросы для закрепления:

1. Понятие случайной величины. Дискретная и непрерывная случайная величина
2. Закона распределения дискретной и непрерывной случайной величины.
3. Функция распределения, её свойства
4. Дифференциальная функция распределения, её свойства.
5. Числовые характеристики случайной величины, формулы их нахождения.
6. Смысл нормального закона распределения. Правило трем сигм.
7. Суть закона больших чисел.

Математическая статистика и ее роль в медицине и здравоохранении. Медико-демографические показатели

Основные понятия математической статистики

Вся мудрость статистики состоит в том, что по части можно судить о целом.

План:

1. Предмет статистика.
2. Основные понятия математической статистики.
3. Статистическое распределение выборки. Полигон и гистограмма.
4. Характеристики положения и рассеяния статистического распределения.
5. Оценка генеральной совокупности по ее выборке. Точность и надежность.

1.Предмет статистика

Слово «статистика» происходит от латинского слова «status-состояние, положение. Впервые это слово при описании состояния государства в середине XVIII века применил немецкий ученый Ахенваль.

Как наука статистика возникла в Англии в XVIII веке в трудах «политических арифметиков».

В настоящее время слово «статистика» употребляется в трех значениях.

Первое значение: статистика - это общественная наука, которая изучает количественную сторону общественных, массовых явлений в неразрывной связи с их качественной стороной.

Второе значение: статистика - это сбор цифровых, статистических данных, характеризующих то или другое общественное явление или процесс (статистическая технология).

Третье значение: статистика - это сами цифры, характеризующие эти явления и процессы.

Статистические методы широко применяются в различных областях знаний: в математике, физике, астрономии, биологии и медицине и т.д.

Статистика возникла на базе математики широко пользуется математическими методами. Это выборочный метод исследования, основанный на математической теории вероятности и законе больших чисел, это различные методы обработки рядов распределения, установление взаимосвязей между явлениями.

Статистика имеет и свои собственные методы. Это метод массового наблюдения, группировок, таблиц, графиков. Как правило, не проводят разграничения математических и статистических методов.

2.Основные понятия математической статистики

Математическая статистика – раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений с целью выявления существующих закономерностей.

Основное отличие от теории вероятности: в статистике рассматриваются не действия над законами распределения и числовыми характеристиками случайных величин, а приближенные *методы отыскания этих законов и характеристик по результатам экспериментов.*

Единственный способ получения информации о случайной величине – это проведение экспериментов. И все характеристики должны быть получены экспериментальным путем.

Предметом математической статистики является изучение случайных величин по результатам наблюдений.

Основная *задача математической статистики* состоит в получении выводов о массовых явлениях и процессах по данным наблюдений над ними или экспериментов.

В математической статистике изучение случайной величины связано с выполнением ряда независимых опытов, в которых она принимает определенные значения. Полученные значения случайной величины *представляют собой статистическую совокупность или статистический ряд.*

Статистическая совокупность – это множество единиц изучаемого явления, объединенных единой качественной основой, общей связью, но отличающихся друг от друга отдельными признаками.

Таковы, например, совокупность домохозяйств, совокупность семей, совокупность предприятий, фирм, объединений и т.п.

Совокупность называется *однородной,* если один или несколько изучаемых существенных признаков ее объектов являются общими для всех единиц.

Совокупность, в которую входят явления разного типа, считается *разнородной.* Совокупность может быть однородна в одном отношении и разнородна в другом. В каждом отдельном случае однородность совокупности устанавливается путем проведения качественного анализа, выяснения содержания изучаемого общественного явления.

По характеру выражения различают атрибутивные и количественные признаки:

- *атрибутивные* (описательные) – выражаются словесно, например, пол, национальность, образование и др. По ним можно получить итоговые сведения о количестве статистических единиц, обладающих данным значением признака;
- *количественные* – выражаются числовой мерой (возраст, стаж работы, объем продаж, размер дохода и т.д.) По ним можно получить итоговые данные о количестве единиц, обладающих конкретным значением признака, и суммарное или среднее значение признака по совокупности.

Пример: Серия таблеток лекарственного вещества, то качественным признаком может служить стандартность таблетки, а количественным контролируемая масса таблетки.

Совокупность, состоящая из всех объектов, которые могут быть к ней отнесены, называется *генеральной*.

Пример: если можно было бы изучить всех больных ревматизмом на земном шаре, то такая группа больных составила бы генеральную совокупность. На практике генеральная совокупность часто рассматривается в конкретных пределах (например, население какого – либо города, серия растворов в ампулах для инъекций.)

Число объектов генеральной совокупности называется её *объёмом*.

Лучше всего провести сплошное обследование, т.е. изучить каждый объект совокупности. Однако в большинстве случаев по разным причинам это сделать невозможно.

Если сплошное обследование невозможно, то из генеральной совокупности выбирают для изучения часть объектов.

Множество объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности, называется *выборочной совокупностью* или *выборкой.* Число объектов выборки называют её объёмом.

Пример: Для контроля качества растворов в ампулах для инъекций на отсутствие в них механических загрязнений из серии 5000 ампул отбирают 150 ампул.

Здесь, 5000 – объём генеральной совокупности, 150 – объём выборочной совокупности.

Сущность выборочного методы заключается в том, чтобы по свойствам части (выборки) судить о численных характеристиках целого (генеральная совокупность)

Для того, чтобы свойства выборки достаточно хорошо отражали свойства генеральной совокупности, выборка должна быть *репрезентативной (представительной)*.

Согласно закону больших чисел, можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если её осуществить случайно. Каждый объект выборки считается отобранным случайно, если все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

3. Статистическое распределение выборки. Полигон и гистограмма

В ходе экспериментов исследователь получает набор числовых данных, отражающих результаты измерений или наблюдений исследуемых объектов.

Если полученные данные расположить в порядке убывания или возрастания числовых значений исследуемого признака, то такой ряд чисел будет называться *вариационным рядом*.

В том случае, когда среди числовых данных есть одинаковые значения, их можно представить в виде таблицы. В первой строке таблицы указываются значения признака (варианты), а во второй – абсолютные или относительные частоты их встречаемости. Такое представление вариационного ряда называют *статистическим распределением*.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Статистическое распределение выборки

Дискретный ряд распределения.

- *таблица, содержащая значения вариант признака и их частоты или относительные частоты*

x	*X1*	…	*Xn*
M	*M1*	…	*Mn*
P=m/n	*P1*	…	*Pn*

Интервальный ряд распределения.

- *таблица, содержащая частичные интервалы и их частоты или относительные частоты*

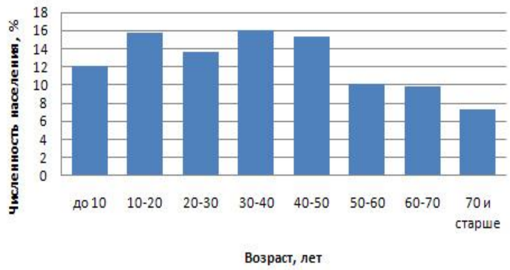
x	*[X0;X1]*	…	*[Xk-1;Xk]*
M	*M1*	…	*Mn*
P=m/n	*P1*	…	*Pn*

Для графического изображения статистического распределения строят *полигоны* и *гистограммы*.

Графическое изображение рядов облегчает их анализ.

Полигон

гистограмма



Гистограммой называется график, по оси абсцисс которого отложены границы классов, а по оси ординат – их частота.

Если интервалы неравные, то весь диапазон измеряемой величины (от минимального до максимального) разбивается на равные интервалы, называемые классами.

Количество интервалов:

Определение количества интервалов n на гистограмме часто осуществляют по формуле Стерджесса:n=1 + 3,322 1g N,

где N- общее количество собранных данных в выборке.

Ширина интервала:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n}$$

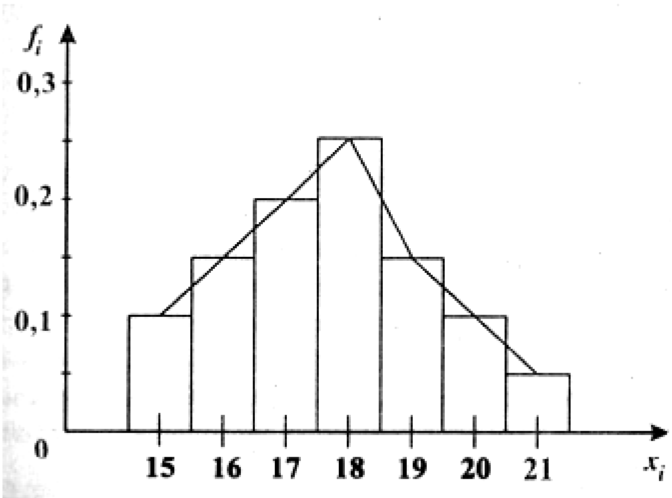
где x-максимальное и минимальное значение выборочной величины, n – количество интервалов

Вычисление частот:

$$f_i = \frac{m_i}{N} \qquad f_i = \frac{m_i}{N} \cdot 100\%$$

При построении гистограммы на оси абсцисс вычисленное количество интервалов интервалы равной ширины, а на оси ординат следует откладывать в произвольно выбранном масштабе значения плотности распределения (абсолютной или относительной). Таким образом, высоты прямоугольников, которые мы строим, должны равняться плотностям соответствующих интервалов.

Интервал	14,5–15,5	15,5–16,5	16,5–- 17,5	17,5–18,5	18,5–19,5	19,5–20,5	20,5–21,5
m_i	2	3	4	5	3	2	1
f_i	0,1	0,15	0,2	0,25	0,15	0,1	0,05



Полигон частот можно получить из гистограммы путем соединения средних значений классов.

Полигон также модно построить и по статистическому распределению.

По оси абсцисс, из точек x_i, проводятся перпендикуляры высотой $\frac{m_i}{n}$ и соединяются ломанной линией.

Построение полигонов и гистограмм позволяет произвести первичный анализ первичный анализ экспериментальных данных, а именно: по форме гистограммы можно сделать предположение о законе распределения случайной величины; выявить наиболее часто встречающиеся значения исследуемой величины и разброс или отклонение относительно этого значения.

4. Характеристики положения и рассеяния статистического распределения

В разделе теории вероятностей были рассмотрены числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

Аналогичные числовые характеристики вводятся и для выборочных данных.

Аналогом основной характеристики положения математического ожидания случайной величины является *выборочная средняя*:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$$

(Если данные представлены в виде гистограммы, то

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Для характеристики рассеяния вариант относительно своей выборочной средней $\overline{x_в}$ вводят характеристику, называемую *выборочной дисперсией*, которая является аналогом дисперсии генеральной совокупности и равна:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{N} \qquad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(C_i - \overline{x}\right)^2 m_i}{\sum_{i=}^{n} m_i}$$

Квадратный корень из выборочной дисперсии называется выборочным среднеквадратическим отклонением:

$$s = \sqrt{s^2}$$

Иногда для сравнения вариабельности признаков, имеющих различную размерность, применяют безразмерный показатель, который называет *коэффициент вариации:*

$$C = \frac{s}{\overline{x}} \cdot 100\%$$

5. Оценка генеральной совокупности по ее выборке. Точность и надежность

Характеристики нормального закона распределения M(X), D(X), σ(X) для генеральной совокупности представляют собой постоянные величины (параметры). По отношению к ним соответствующие выборочные характеристики $\overline{x_в}$, $S_в^2, S_в$ - являются *оценками* генеральных параметров, т.е. приближенными значениями параметров генеральной совокупности.

Оценкой параметров генеральной совокупности называют всякую однозначно определенную функцию результатов наблюдений, с помощью которой судят о значении параметра.

Оценки подразделяются на точечные (определяется одним числом) и интервальные (определяется двумя концами интервала).

Точечные оценки

Во многих случаях мы располагаем информацией о виде закона распределения случайной величины (нормальный, бернуллиевский, равномерный и т. п.), но не знаем параметров этого распределения, таких как *M*(X), *D*(X). Для определения этих параметров применяется выборочный метод.

Точечная оценка – это оценка параметра генеральной совокупности параметром, рассчитанным на основе выборки.

Точечной оценкой генеральной средней является выборочное среднее.

Выборочным средним называется среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности.

Если все значения x_1, x_2,..., x_n признака выборки различны (или если данные не сгруппированы), то:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} \qquad\qquad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Выборочное среднее является основной характеристикой положения, показывает центр распределения совокупности, позволяет охарактеризовать исследуемую совокупность одним числом, проследить тенденцию развития, сравнить различные совокупности (выборочное среднее является той точкой, сумма отклонений наблюдений от которой равна 0).

Для оценки степени разброса (отклонения) какого-то показателя от его среднего значения, наряду с максимальным и минимальным значениями, используются понятия дисперсии и стандартного отклонения.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{N} \qquad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (C_i - \bar{x})^2 m_i}{\sum_{i=}^{n} m_i} \qquad s = \sqrt{s^2}$$

Точечная оценка, особенно при малой выборке, может значительно отличаться от истинных параметров генеральной совокупности. Поэтому при небольшом объеме выборки пользуются *интервальными оценками*.

Интервальной оценкой называют оценку, определяющуюся двумя концами интервала.

Интервальной оценкой называют оценку, определяющуюся двумя концами интервала. Интервальная оценка - это оценка параметра генеральной совокупности интервалом, в который этот параметр с заданной вероятностью попадет.

В этом случае указывается интервал (доверительный интервал, или доверительные границы), в котором с определенной (доверительной) вероятностью р находится генеральная средняя.

Интервальная оценка генеральной средней при малой выборке:

$$\overline{x_в} - t\frac{\sigma_в}{\sqrt{n}} < \overline{x_Г} < \overline{x_в} + t\frac{\sigma_в}{\sqrt{n}}$$

$$\underbrace{\overline{x_в} - t\frac{\sigma_в}{\sqrt{n-1}} < \overline{x_Г} < \overline{x_в} + t\frac{\sigma_в}{\sqrt{n-1}}}_{\text{доверительный интервал}}$$

n<30

доверительный интервал

t — параметр, называемый коэффициентом Стьюдента (определяется по таблице)

Задача интервальной оценки заключается в том, что по данным выборки строится такой числовой интервал (доверительный интервал), внутри которого с заранее заданной вероятностью, близкой к единице, будет находиться оцениваемый параметр.

Интервальные оценки позволяют определить точность и надежность оценок.

Чтобы дать представление о точности и надежности оценки результата пользуются *доверительными интервалами* и доверительными вероятностями.

Доверительный интервал определяет, на какую величину может отличаться отдельное значение результата измерения при нормальном распределении от своего среднего значения.

$$\bar{x}_в - \frac{t\sigma_в}{\sqrt{n-1}} < \bar{x}_г < \bar{x}_в + \frac{t\sigma_в}{\sqrt{n-1}},$$

Точность оценки

Точность оценки характеризуется положительным числом, которое характеризует величину расхождения между оценками выборки и генеральной совокупности.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки называют вероятность p:

Надежность

- с P = 0,68 в интервал ($x_{ср} \pm \sigma$)
- с P = 0,95 в интервал ($x_{ср} \pm 2\sigma$)
- с P = 0,99 в интервал ($x_{ср} \pm 2,6\sigma$)
- с P = 0,997 в интервал ($x_{ср} \pm 3\sigma$)

В качестве параметров надежности наиболее часто используют величины, близкие к единице: 0,95; 0,99 и 0,999.

Доверительным называют интервал, который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью p.

Точность и надежность оценки взаимосвязаны: с уменьшением точности увеличивается надежность и, наоборот, с увеличением точности уменьшается надежность. Точность и надежность оценки зависят от объема выборки n; увеличивая объем выборки можно повысить точность и надежность оценки.

Пример: Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,9 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если среднее квадратическое отклонение σ=5, выборочная средняя $\bar{x} = 20$ и объем выборки n=100.

Решение: Требуется найти доверительный интервал

$$\bar{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

p=2Φ(t)

$$\Phi(t) = \frac{p}{2} = \frac{0,9}{2} = 0,45$$

t=1,65

$$20 - 1,65\frac{5}{\sqrt{100}} < a < 20 + 1,65\frac{5}{\sqrt{100}}$$

Получаем доверительный интервал:

$$19,175 < a < 20,825$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	**0,50**	0,1915	**1,00**	0,3413	**1,50**	0,4332	**2,00**	0,4772
0,01	0,0040	**0,51**	0,1950	**1,01**	0,3438	**1,51**	0,4345	**2,02**	0,4783
0,02	0,0080	**0,52**	0,1985	**1,02**	0,3461	**1,52**	0,4357	**2,04**	0,4793
0,03	0,0120	**0,53**	0,2019	**1,03**	0,3485	**1,53**	0,4370	**2,06**	0,4803
0,04	0,0160	**0,54**	0,2054	**1,04**	0,3508	**1,54**	0,4382	**2,08**	0,4812
0,05	0,0199	**0,55**	0,2088	**1,05**	0,3531	**1,55**	0,4394	**2,10**	0,4821
0,06	0,0239	**0,56**	0,2123	**1,06**	0,3554	**1,56**	0,4406	**2,12**	0,4830
0,07	0,0279	**0,57**	0,2157	**1,07**	0,3577	**1,57**	0,4418	**2,14**	0,4838
0,08	0,0319	**0,58**	0,2190	**1,08**	0,3599	**1,58**	0,4429	**2,16**	0,4846
0,09	0,0359	**0,59**	0,2224	**1,09**	0,3621	**1,59**	0,4441	**2,18**	0,4854
0,10	0,0398	**0,60**	0,2257	**1,10**	0,3643	**1,60**	0,4452	**2,20**	0,4861
0,11	0,0438	**0,61**	0,2291	**1,11**	0,3665	**1,61**	0,4463	**2,22**	0,4868
0,12	0,0478	**0,62**	0,2324	**1,12**	0,3686	**1,62**	0,4474	**2,24**	0,4875
0,13	0,0517	**0,63**	0,2357	**1,13**	0,3708	**1,63**	0,4484	**2,26**	0,4881
0,14	0,0557	**0,64**	0,2389	**1,14**	0,3729	**1,64**	0,4495	**2,28**	0,4887
0,15	0,0596	**0,65**	0,2422	**1,15**	0,3749	**1,65**	0,4505	**2,30**	0,4893
0,16	0,0636	**0,66**	0,2454	**1,16**	0,3770	**1,66**	0,4515	**2,32**	0,4898

Для того, чтобы статистические оценки давали хорошее приближение оценивающих параметров, они должны удовлетворять условиям:

- объем выборки должен быть достаточным для оценивания
- оценка интересующего нас параметра есть случайная величина.

Статистические оценки:

- *Несмещенные* – есть оценка мат.ожидания, которая равна оценивающему параметру;
- *Смещенные* – оценка $M(x)\neq$ оценивающему параметру;
- *Эффективные* – оценка, имеющая при заданном объеме выборки n наименьшую дисперсию;
- *Состоятельные* – оценка, стремящаяся при $n\to 0$ по вероятности к оцениваемому параметру.

Контрольные вопросы для закрепления:

1. Предмет и задачи статистики, как науки
2. Понятие генеральной, выборочной, статистической совокупности.
3. Какой должна быть выборка, чтобы в полной мере отражать свойства генеральной совокупности?
4. Понятие статистического ряда распределения, графическое изображение, приведите примеры.
5. Числовые характеристики статистического ряда распределения.
6. Оценка генеральной совокупности: точечная и интервальная.

Математическая статистика и ее роль в медицине и здравоохранении. Медико-демографические показатели.

Погрешности измерений и их оценка

План:

1. Погрешности измерений.
2. Классификация погрешностей
3. Оценка погрешности измерений.

1.Погрешности измерений

В основе точных естественных наук лежат измерения. При измерениях значения величин выражаются в виде чисел, которые указывают во сколько раз измеренная величина больше или меньше другой величины, значение которой принято за единицу. Полученные в результате измерений числовые значения различных величин могут зависеть друг от друга. Связь между такими величинами выражается в виде формул, которые показывают, как числовые значения одних величин могут быть найдены по числовым значениям других.

Измерение - это совокупность действий, выполняемых при помощи средств измерений с целью нахождения числового значения измеряемой величины в принятых единицах измерения.

Различают *прямые измерения и косвенные измерения,*

Прямые (непосредственные) измерения – это такие измерения, при которых мы получаем численное значение измеряемой величины либо прямым сравнением ее с мерой (эталоном), либо с помощью приборов, градуированных в единицах измеряемой величины.

Однако далеко не всегда такое сравнение производится непосредственно. В большинстве случаев измеряется не сама интересующая нас величина, а другие величины, связанные с нею теми или иными соотношениями и закономерностями. В этом случае для измерения необходимой величины приходится предварительно измерить несколько других величин, по значению которых вычислением определяется значение искомой величины. Такое измерение называется косвенным.

Косвенные измерения состоят из непосредственных измерений одной или нескольких величин, связанных с определяемой величиной количественной зависимостью, и вычисления по этим данным определяемой величины.

Чаще приходится встречаться не с измерениями, а с контролем. *Контролем* называется определение соответствия измеряемого объекта техническим условиям и заданному размеру, допуску и отклонениям формы, как правило, без определения точных числовых значений размера*(например, контроль калибрами)*.

На измерения влияют: объект измерений, измеряемая величина, оператор, средство измерений, метод измерений, условия измерений.

Объект измерений принято считать неизменным, т.е. всегда предполагается, что существует истинное постоянное значение измеряемой величины.

Все остальные составляющие процесса измерений все время меняются:

- средства измерений (СИ),
- условия измерений,
- оператор

Примечания:

- Эти изменения могут быть случайными, мы не в состоянии их предвидеть. Они могут быть и не случайными, но такими, которые мы не смогли заранее предусмотреть и учесть.
- Если они влияют на результаты измерений, то при повторных измерениях одной и той же величины результаты будут отличаться один от другого тем сильнее, чем больше факторов не учтено и чем сильнее они меняются.

Истинным значением измеряемой величины называется значение данной величины, которое идеальным образом отражало бы в качественном и количественном отношениях соответствующее свойство объекта. Определить экспериментально его невозможно вследствие неизбежных погрешностей измерения.

Погрешность измерения - оценка отклонения измеренного значения величины от её истинного значения. Погрешность измерения является характеристикой (мерой) точности измерения.

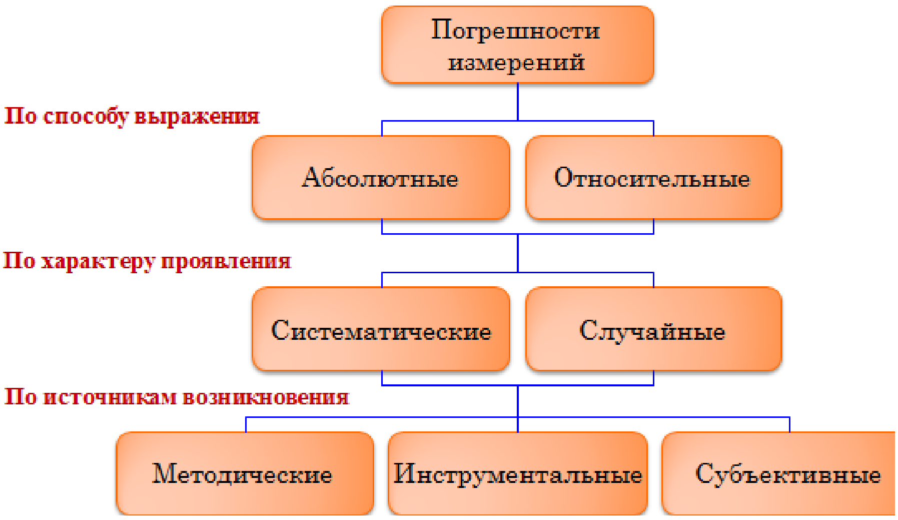
Точность измерений - качество измерений, отражающее близость их результатов к истинному значению измеряемой величины.

Никакие измерения не могут быть абсолютно точными. Измеряя какую-либо величину, мы всегда получаем результат с некоторой погрешностью (ошибкой). Другими словами, измеренное значение величины всегда отличается от истинного ее значения. Задачей экспериментатора является не только нахождение самой величины, но и оценка допущенной при измерении погрешности.

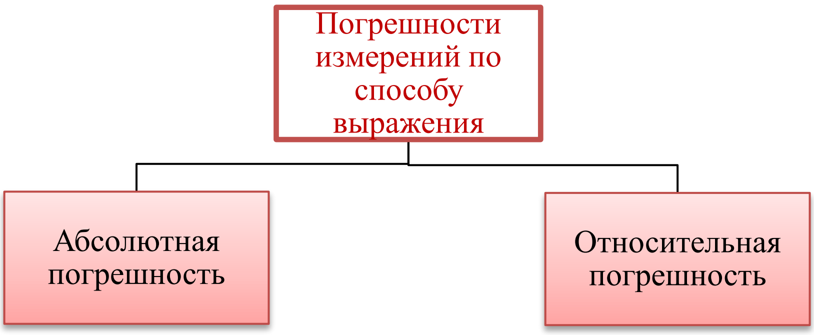
2. Классификация погрешностей

Погрешности выделяют:

- по способу выражения;
- по характеру проявления;
- по источникам возникновения.



Погрешности измерений по способу выражения



Абсолютная погрешность измерения – погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины и равна:

$$\Delta = x - x_{\text{ист}}$$

Необходимо различать термины абсолютная погрешность и *абсолютное значение погрешности*, т.к. абсолютное значение погрешности – значение погрешности без учета ее знака (модуль погрешности).

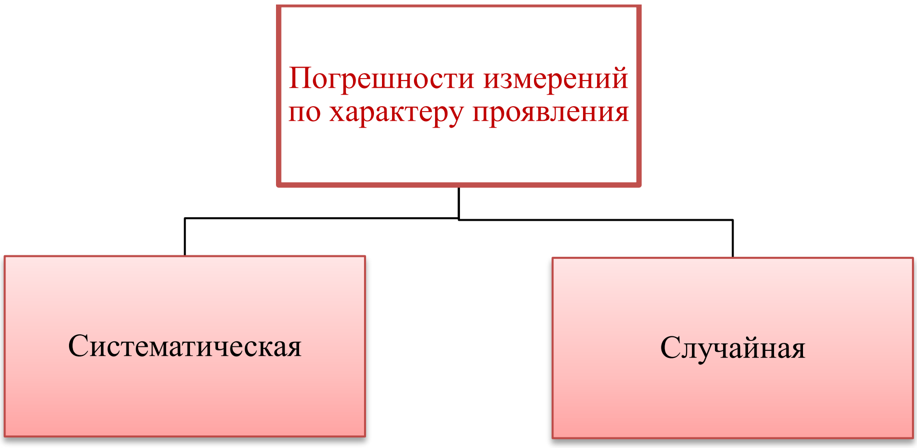
Абсолютное значение погрешности равно:

$$\Delta_{\text{абс}} = |\Delta| = |x - x_{\text{ист}}|$$

Относительная погрешность измерения – погрешность измерения, выраженная отношением абсолютной погрешности измерения к действительному или измеренному значению измеряемой величины:

$$\delta = \frac{\Delta}{x} \cdot 100\ \%$$

Погрешности измерений по характеру проявления



Систематическая погрешность измерения – составляющая погрешности результата измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же физической величины (неправильный метод измерений, выбрана неправильная градуировка измерительного прибора).

Примечание: в зависимости от характера измерения систематические погрешности подразделяют на постоянные, прогрессивные, периодические и погрешности, изменяющиеся по сложному закону.

Случайная погрешность измерения – составляющая погрешности результата измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) при повторных измерениях, проведенных с одинаковой тщательностью, одной и той же физической величины. Исключить опытным путем нельзя. Однако их влияние можно оценить с помощью методов математической статистики. Уменьшение влияния случайной погрешности достигается многократными измерениями.

Причиной появления систематических погрешностей могут быть неисправности измерительной аппаратуры, несовершенство метода измерения, неправильная установка измерительных приборов и отступление от нормальных условий их работы, особенности и неправильные действия самого оператора. Систематические погрешности в принципе могут быть выявлены и почти полностью устранены. Для этого требуется проведение тщательного анализа возможных источников погрешностей в каждом конкретном случае. К сожалению, несмотря на все усилия, всегда остаются некоторые не исключенные, остаточные систематические погрешности. Задачей экспериментатора является определение их наибольших, граничных значений.

Наличие случайных погрешностей выявляется при проведении ряда измерений этой величины, когда оказывается, что результаты измерений не совпадают друг с другом. Если систематические погрешности исключены, то полученные при отдельных наблюдениях результаты вследствие случайных причин будут рассеяны в окрестности истинного значения. Если же систематические погрешности присутствуют, то результаты наблюдений будут соответственно смещены в сторону от истинного значения.

Неправильной установкой или сборкой весов, неправильным изготовлением (заводской брак), недостаточно точной подгонкой гирь, усталостными изменениями упругих частей весов (в частности, их естественным старением) и другими факторами.

Систематические погрешности внешне себя никак не проявляют. Они обнаруживаются, например, при проверке нуля шкалы или чувствительности весов во время госповерки (проверки правильности показаний прибора по эталонным мерам или средствам измерений).

Обычно случайные погрешности возникают из-за одновременного действия многих случайных причин, каждая из которых в отдельности мало влияет на результат измерения. Поэтому нет простых способов избавиться от случайных погрешностей. Нужно либо коренным образом изменять условия измерительного эксперимента, либо удовлетвориться отысканием области, в которой лежит истинное значение измеряемой величины с заданной вероятностью. Математические дисциплины, устанавливающие поведение случайных величин, такие как теория вероятностей и математическая статистика, представляют для этого необходимые средства.

Случайная погрешность - это составляющая погрешности, изменяющаяся случайным образом при повторных взвешиваниях одного и того же груза. Случайная погрешность чаще всего связана с квалификацией оператора, метеорологическими условиями и другими факторами, изменяющимися в момент измерения.

Погрешности измерений по источникам возникновения

Методическая погрешность измерения (погрешность метода измерений) – составляющая систематической погрешности измерений, обусловленная несовершенством принятого метода измерений.

Инструментальная погрешность измерения (погрешность инструмента) – составляющая погрешности измерения, обусловленная погрешностью применяемого средства измерений.

Субъективная погрешность измерения (личная погрешность) – составляющая систематической погрешности измерений, обусловленная индивидуальными особенностями оператора.

3. Оценка погрешности измерений

Оценка погрешности измерений - одно из важных мероприятий по обеспечению единства измерений. Количество факторов, влияющих на точность измерения, достаточно велико, и любая классификация погрешностей измерения в известной мере условна, так как различные погрешности в зависимости от условий измерительного процесса проявляются в различных группах.

Оценивание погрешностей производится с целью получения объективных данных о точности результата измерения.

Оценка систематической погрешности

среднее арифметическое значение	$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
относительная систематическая погрешность	$В = \frac{\bar{X} - АЗ}{АЗ} \times 100\%$

Среднее арифметическое значение (X) используется при расчете систематической погрешности, которая характеризует *правильность измерений* и которое определяется близостью среднего арифметического значения результатов повторных измерений контрольного материала (X) к аттестованному значению (АЗ) измеряемой величины.

Систематическая погрешность может быть выражена в относительных величинах. Относительная систематическая погрешность, или смещение (В), не зависит от единиц измеряемой величины и выражается в %, также характеризует систематическую погрешность.

Правильность измерений - качество измерений, отражающее близость к нулю систематических погрешностей в их результатах.

Оценка случайной погрешности

среднее квадратическое отклонение	$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Xi - \bar{X})^2}{n-1}}$
коэффициент вариации	$CV = \frac{S}{\bar{X}} \cdot 100\%$

Среднее квадратическое отклонение (S) и коэффициент вариации (CV) служат характеристикой случайных погрешностей и используются для оценки сходимости и воспроизводимости измерений и служат характеристикой случайных погрешностей .

Сходимость измерений - качество измерения, отражающее близость друг к другу результатов измерений одной и той же величины, выполненных повторно одними и теми же средствами, одним и тем же методом в одинаковых условиях и с одинаковой тщательностью.

Воспроизводимость измерений – качество измерений, отражающее близость друг к другу результатов измерений, одной и той же величины, выполненных в разных условиях (в разных местах, разными методами, разными средствами, разными операторами, в разное время), но приведенных к одним и тем же условиям измерений (температуре, давлению, влажности и др.).

Таким образом, показатели качества измерений:

- точность;
- правильность;
- сходимость;
- воспроизводимость.

Оценка абсолютной погрешности прямых измерений

Погрешности прямых измерений можно классифицировать следующим образом:

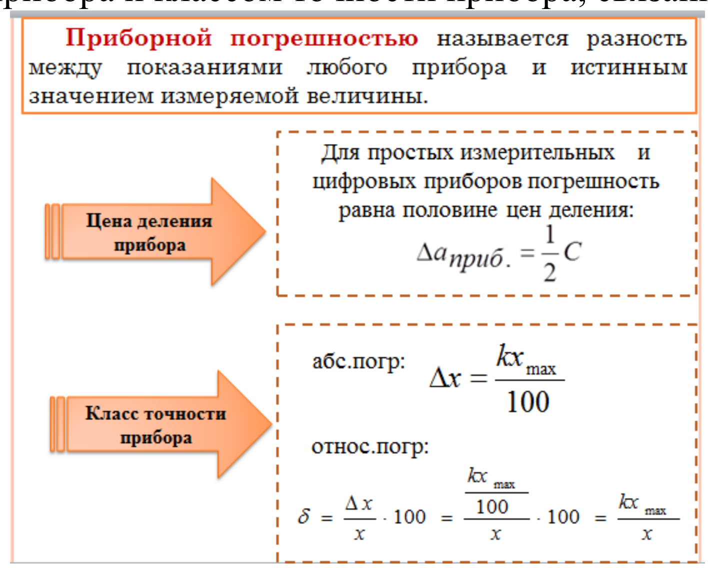
Выбрать $\Delta_{max} = \Delta$ (выбрать максимальную погрешность и принять ее за погрешность измеряемой величины)

Систематические погрешности (ошибки) обычно остаются постоянными на протяжении всей серии измерений. Например, при переключении шкалы вольтметра с одного предела на другой меняется его внутреннее сопротивление, что может внести в последующие измерения систематическую погрешность.

Систематические погрешности надо стараться отслеживать и учитывать, корректируя полученные результаты, т.е. исправляя их на необходимую величину. Однако обнаружение систематических погрешностей требует, как правило, дополнительных более точных или альтернативных экспериментов, проведение которых невозможно в рамках лабораторных работ. В этих случаях достаточно указать возможный источник ошибок .

Приборной погрешностью называется разность между показаниями любого прибора и истинным значением измеряемой величины.

Приборные погрешности определяются двумя факторам ценой деления прибора и классом точности прибора, связанным с его устройством.



где к - класс точности в %, указанный на панели прибора,

x_{max}– предел измерения для стрелочных приборов

Погрешности разброса возникают вследствие различия экспериментальных значений при многократном повторении измерений одной и той же величины.

Существует несколько методов определения данного вида погрешности, например: метод Корндфельда и метод расчета погрешностей Стьюдента.

Метод Корндфельда заключается в выборе доверительного интервала в пределах от минимального до максимального результат измерений и погрешность, как половина разности между максимальным и минимальным результатом измерения.

Недостатком метода Корнфельда является то обстоятельство, что вероятность приводимого результата определяется исключительно количеством n проведенных измерений и не может быть изменена посредством увеличения или уменьшения доверительного интервала ± Δx. Такую возможность предусматривает несколько более сложный метод расчета погрешностей Стьюдента, который выполняется по шагам.

Коэффициент Стьюдента находится по таблице:

p =0,68		p =0,95		p =0,99	
n	$t_{p,n}$	n	$t_{p,n}$	n	$t_{p,n}$
2	2,0	2	12,7	2	63,7
3	1,3	3	4,3	3	9,9
4	1,3	4	3,2	4	5,8
5	1,2	5	2,8	5	4,6
6	1,2	6	2,6	6	4,0
7	1,1	7	2,4	7	3,7
8	1,1	8	2,4	8	3,5
9	1,1	9	2,3	9	3,4
10	1,1	10	2,3	10	3,3
15	1,1	15	2,1	15	3,0
20	1,1	20	2,1	20	2,9
30	1,1	30	2,0	30	2,8
100	1,0	100	2,0	100	2,6

Использование метода Стьюдента является необходимым, когда требуется знать значение физических параметров с заданной доверительной вероятностью (как в ряде лабораторных работ). На практике доверительная вероятность погрешности разброса выбирается в соответствии с доверительной вероятностью, соответствующей классу точности измерительного прибора.

Пример: При измерении массы таблетки на весах были получены следующие результаты: 0, 148 г; 0,147 г; 0, 149 г; 0,150 г. Определить среднее значение, относительную и интервальную погрешность при доверительной вероятности 0,95%.

Решение:

$$\bar{x} = \frac{0{,}148 + 0{,}147 + 0{,}149 + 0{,}150}{4} = 0{,}1485$$

Оценка стандартного отклонения

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{(0{,}148 - 0{,}1485)^2 + (0{,}147 - 0{,}1485)^2 + (0{,}149 - 0{,}1485)^2 + (0{,}150 - 0{,}1485)^2}{4 \cdot 3}} = 6 \cdot 10^{-4}$$

По таблице находим $t_{p,n}=t_{0,95\,,\,4}=3{,}2$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta\bar{x} = t_p \cdot S_{\bar{x}} = 3{,}2 \cdot 0{,}0006 = 0{,}00192 \approx 0{,}002$$

Относительная погрешность:

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{0{,}00192}{0{,}1485} \cdot 100\% \approx 1\%$$

Истинная масса таблетки:

$$\mathrm{x} = (0{,}1485 \mp 0{,}002)$$

Контрольные вопросы для закрепления:

1. Почему возникают погрешности измерений? Дайте понятие термина «измерение», приведите примеры прямых и косвенных измерений.
2. Дайте понятие термина «погрешность»
3. Приведите классификация погрешностей, охарактеризуйте каждую погрешность.
4. Оценка погрешности измерений. Какая погрешность характеризует качество измерения? Приведите примеры.
5. Оценка абсолютной погрешности прямых измерений.
6. Опишите процедуру расчета абсолютной случайной погрешности прямых измерений.
7. От каких параметров зависит коэффициент Стьюдента?

Математическая статистика и ее роль в медицине и здравоохранении. Медико-демографические показатели.

Медицинская статистика, анализ медико-демографических показателей

План:
1. Медицинская статистика
2. Организация и этапы медико-статистического исследования
3. Анализ медико-демографических показателей

1.Медицинская статистика

Математическая статистика является основой применения количественных методов анализа в различных сферах человеческой деятельности.

Одной из отраслей статистики является статистика медицинская, которая изучает количественную сторону массовых явлений и процессов в медицине.

В России медицинская статистика возникла в середине 18 века.

Медицинскую и так называемую санитарную статистику не разделяют.

Медицинская статистика – отрасль социальной статистики, которая изучает количественные характеристики состояния здоровья населения, развития систем здравоохранения, определяет степень интенсивности влияния на них социально-экономических факторов, а также занимается приложением статистических методов к обработке и анализу результатов клинических и лабораторных исследований.

Медицинская статистика является разделом науки об общественном здоровье и здравоохранении, в свою очередь, она состоит из статистики здоровья и статистики здравоохранения.

Статистика здоровья изучает здоровье общества в целом и отдельных его групп и устанавливает зависимость здоровья от различных факторов социальной среды. *Статистика здравоохранения* анализирует о сети медицинских и санитарных учреждений, их деятели кадрах, оценивает эффективность различных организационных мероприятий по профилактике и лечению болезней. Статистика и статистический метод широко используются врачами в практической и научной работе.

Медицинская статистика и ее методы необходимы при всех научных исследованиях и в практике здравоохранения. Статистические показатели - основа оценки здоровья населения деятельности ЛПУ.

Источниками информации, позволяющими оценить основные показатели, являются: первичная учетная медицинская документация, которая ежедневно ведется в учреждениях здравоохранения; статистическая отчетность; лабораторные и клинические обследования. Вопросами сбора, обработки и хранения информации занимаются отделы статистики, которые входят в структуру медицинских организаций.

Медицинская статистика использует методы математической статистики, связанные с обработкой выборочных данных. В основе сбора медико-биологических данных лежит *закон больших чисел*, позволяющий при массовых обследованиях выявить наличие объективных закономерностей, лежащих в основе эпидемиологических, социальных, медицинских процессов.

2.Организация и этапы медико-статистического исследования

1-й этап - составление программы и плана исследования;

2-й этап - сбор материала;

3-й этап - разработка материала;

4-й этап –анализ, выводы, предложения.

1-й этап: составление программы и плана исследования

Составление программы и плана исследования (проект исследования) нужно начать с цели исследования, которая должна быть ясно и чётко сформулирована. Цель (зачем проводится исследование?) Задачи (как будет достигнута цель?)

Статистическое наблюдение – научно организованная работа по сбору статистической информации о явлениях и процессах общественной жизни.

Статистическое наблюдение проводится в соответствии с планом.

а) Программно методологические вопросы.

Цель наблюдения - необходимо четко формулировать цель наблюдения, чтобы избежать излишнего или неполного сбора данных.

Объект наблюдения — это исследуемая статистическая совокупность. Как правило является группа людей объединённых каким – то признаками.

Единица наблюдения – это каждый человек группы.

Место наблюдения - где необходимо собирать данные.

Программа статистического наблюдения - перечень показателей, характеризующих изучаемый объект.

Инструментарий разрабатывается для реализации программы наблюдения и включает в себя формуляры и инструкции.

Формуляры - бланки, анкеты, табеля, формы отчетности, переписные листы и т. д.

Они могут быть индивидуальными (содержат сведения об одной единице) и списочными (содержат данные по нескольким единицам).

Инструкции - пояснения к выполнению программы. Выпускаются в виде листков и брошюр.

При проведении наблюдения используется три основных способа сбора данных: Непосредственное наблюдение - информацию получают путем замера, взвешивания.

Документальное наблюдения - сведения получают из документов первичного учета. Опрос - ответы на изучаемые вопросы записывают со слов опрашиваемых.

Опрос может быть:

- экспедиционным - анкеты заполняют специально подготовленные экспедиторы;
- саморегистрационным - анкеты заполняют сами опрашиваемые.
- корреспондентским - сведения сообщают корреспонденты.

б) Организационные вопросы

В организационных вопросах указываются:

Органы, которые будут проводить статистическое наблюдение.

Время наблюдения включает;

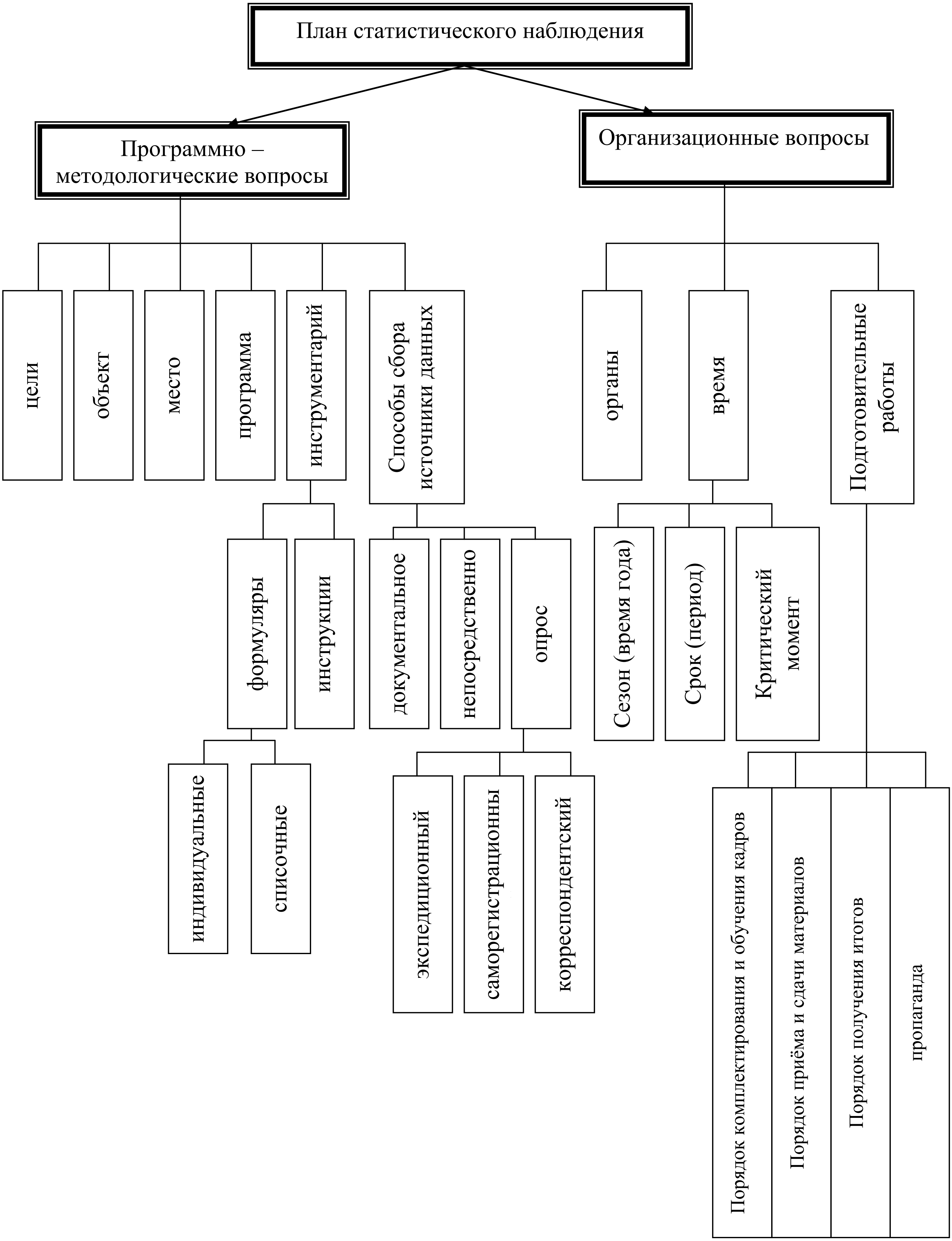
- *сезон* наблюдения - время года, в котором объект находится в обычном для него состоянии;
- *срок* наблюдения - период с начала до конца сбора сведений;
- *критический момент* наблюдения - время, по состоянию, на которое собираются данные.

Например: Всероссийская перепись 1999 года будет проведена с 16 по 23 февраля, а критический момент - 12 часов ночи с 15 на 16 февраля.

Подготовительные работы:

- порядок комплектования и обучения кадров;
- порядок приема и сдачи материалов;
- порядок получения итогов (централизованно и децентрализовано);
- пропаганда статистических исследований с помощью средств печати, телевидения.

Установление времени,сроков, определение форм и видов наблюдения, способы регистрации фактов.


План статистического наблюдения
Программно – методологические вопросы
Организационные вопросы
цели
объект
место
программа
инструментарий
Способы сбора источники данных
органы
время
Подготовительные работы
формуляры
инструкции
документальное
непосредственно
опрос
Сезон (время года)
Срок (период)
Критический момент
индивидуальные
списочные
экспедиционный
саморегистрационны
корреспондентский
Порядок комплектирования и обучения кадров
Порядок приёма и сдачи материалов
Порядок получения итогов
пропаганда

Статистическое наблюдение различается по формам, видам и способам наблюдения

В статистической практике используются три организационные формы наблюдения:

- статистическая отчетность;
- специально организованное наблюдение;
- регистровое наблюдение.

Статистическая отчетность. Основная форма статистического наблюдения, которая заключается в получении статистическими органами данных от единиц наблюдения. Данные поступают в органы статистики от предприятий и организаций в виде обязательных отчетов об их деятельности. Отчётные документы утверждаются Министерством финансов РФ и Госкомстатом РФ. Методы и формы организации статистической отчетности дифференцируются применительно к различным типам предприятий и формам предпринимательства. Основными формами отчетности являются бухгалтерский баланс и отчет о прибылях и убытках.

Специально организованное наблюдение. Специально организованные статистические наблюдения осуществляются в виде переписей, единовременного учета и специальных обследований. Переписи, как и единовременный учет, проводятся в целях регистрации фактов на определенную дату.

Перепись – это специально организованная регистрация массовых явлений с целью определения их размера и состава. Если же для получения информации используются материалы первичного учета или действующей отчетности, имеет место единовременный учет. Специальное статистическое обследование организуется, когда требуется дополнительная детализация тех или иных показателей.

Регистровое наблюдение. Основано на ведении статистического регистра, с помощью которого осуществляется непрерывный статистический учет за долговременными процессами, имеющими фиксированное начало, стадию развития и фиксированное окончание.

В практике статистики различают регистры населения и регистры предприятий.

Регистр населения - поименованный и регулярно актуализируемый перечень жителей страны. Программа наблюдения ограничена общими признаками, такими, как пол, дата и место рождения, дата вступления в брак (эти данные остаются неизменными в течение всего периода наблюдения) и брачное состояние (переменный признак). Как правило, регистры хранят информацию только по тем переменным признакам, изменение значений которых документально оформлено.

Информация в регистр заносится на каждого родившегося и прибывшего из-за границы. Если человек умер или выехал на постоянное место жительства из страны, то сведения о нем изымаются из регистра. Регистры населения ведутся по отдельным регионам страны. При перемене места жительства сведения по единице наблюдения передаются в регистр соответствующей территории. В связи с тем что правила регистрации довольно сложны и ведение регистра требует больших затрат, эта форма наблюдения практикуется в государствах с небольшой численностью и высокой культурой населения (в основном это европейские страны).

Примером *регистра предприятий* может служить единый государственный регистр предприятий и организаций (ЕГРПО). Все работы по его ведению осуществляет Госкомстат России.

Виды статистического наблюдения подразделяются на виды по следующим признакам:

– по времени регистрации данных;
– по полноте охвата единиц совокупности;

Виды статистического наблюдения *по времени регистрации*:

1)*Текущее* (непрерывное) наблюдение - проводится для изучения текущих явлений и процессов. Регистрация фактов осуществляется по мере их свершения (регистрация семейных браков и разводов)

2)*Прерывное* наблюдение - проводится по мере необходимости, при этом допускаются временные разрывы в регистрации данных:

Периодическое наблюдение - проводится через сравнительно равные интервалы времени (перепись населения).

Единовременное наблюдение - осуществляется без соблюдения строгой периодичности его проведения.

По полноте охвата единиц совокупности различают следующие виды статистического наблюдения:

Сплошное наблюдение - представляет собой сбор и получение информации обо всех единицах изучаемой совокупности. Характеризуется высокими материальными и трудовыми затратами, недостаточной оперативностью информации. Применяется при переписи населения, при сборе данных в форме отчетности, охватывающей крупные и средние предприятия разных форм собственности.

Несплошное наблюдение - основано на принципе случайного отбора единиц изучаемой совокупности, при этом в выборочной совокупности должны быть представлены все типы единиц, имеющихся в совокупности. Имеет ряд преимуществ перед сплошным наблюдением: сокращение временных и денежных затрат.

Несплошное наблюдение подразделяется на:

Выборочное наблюдение - основано на случайном отборе единиц, которые подвергаются наблюдению.

Монографическое наблюдение - заключается в обследовании отдельных единиц совокупности, характеризующихся редкими качественными свойствами. Пример монографического наблюдения: характеристика работы отдельных предприятий, для выявления недостатков в работе или тенденций развития.

Метод основного массива - состоит в изучении самых существенных, наиболее крупных единиц совокупности, имеющих по основному признаку наибольший удельный вес в изучаемой совокупности.

Метод моментных наблюдений - заключается в проведении наблюдений через случайные или постоянные интервалы времени с отметками о состоянии исследуемого объекта в тот или иной момент времени.

Единица наблюдения – это первичный элемент статистической совокупности, обладающий набором учитываемых признаков.

Учитываемый признак – каждая единица наблюдения имеет множество характеристик, однако учитываются только те из них, которые необходимы для достижения поставленной цели.

По характеру учетные признаки делятся на:

Качественный признак (описательный) – это признак, отдельные варианты которого выражаются в виде понятий или наименований.

Количественный признак (имеют числовое выражение) – это признак, отдельные варианты которого различаются по величине, т.е. варьируют.

По роли признака в совокупности делятся на:

Результативные признаки – признаки, изменяющиеся под действием других связанных с ними признаков.

Факторные – признаки, обуславливающие изменения результативных признаков.

Составляя перечень учетных признаков, исследователь должен сразу думать об их *группировке*.

Группировка – расчленение множества единиц изучаемой совокупности на группы по определенным существенным для них признакам.

Это необходимо и для разработки учетных документов, и для составления макетов таблиц, и для последовательных этапов исследования.

Группировки

Типологическая	**Вариационная**
Описательные признаки, выраженные словесно (пол, виды заболеваний)	Количественные признаки, имеющее числовое выражение (возраст, рост, уровень дохода)

Программа сбора материала. Место, время, объём исследования.

После определения перечня учетных признаков и их группировки нужно сконструировать различные учетные документы на каждую единицу наблюдения.

Место исследования: например, для участкового терапевта – терапевтический участок.

В научном исследовании можно исследовать всю совокупность или только часть.

Пример: Практический врач анализирует всё население участка, все кадры поликлиники и т.д. (генеральная совокупность)

Если надо установить закономерность, например, посещаемости поликлиники по дням недели, то можно анализировать не все посещения за год, а часть этих посещений (выборочная совокупность)

Важно определить какую совокупность изучать.

Формирование статистической совокупности

Для обеспечения качественной представительности выборочной совокупности существуют определенные методы и способы отбора единиц исследования.

1. случайный отбор – лотерея
2. механический отбор – каждый 2, 5 по списку
3. типологический отбор – по типологическому признаку (например, по наличию того или иного заболевания)
4. серийный отбор – сочетание 3 и 1 или 3 и 2
5. парно – сопряженный – формирование контрольной группы, похожую на группу наблюдения, а различия по изучаемому фактору воздействия, методу лечения.

При ручном анализе *программа разработки* материала представляет собой перечень и макет таблиц.

Статистическая таблица

Наиболее удобный вид статистической сводки материала.

Статистической называется таблица, которая содержит сводную числовую характеристику по одному или нескольким существенным взаимосвязанным признакам.

Основа статистической таблицы
Название таблицы
(общий заголовок)

Содержание строк	Наименование граф (верхний заголовок)					
А	1	2	3	4	5	…
Наименование строк (боковой заголовок)						
Итоговая строка						Итоговая графа

Статистическая таблица имеет свое *подлежащее* и *сказуемое*.

Подлежащее таблицы показывает, о каком явлении идет речь в таблице, и представляет собой группы и подгруппы, которые характеризуются рядом показателей.

Сказуемым таблицы называются числовые показатели, с помощью которых характеризуется объект, т. е. подлежащее таблицы.

Показатели, образующие подлежащее, располагают в левой части таблицы, а показатели, составляющие сказуемое, помещают справа.

Составленная и оформленная статистическая таблица должна иметь общий, боковые и верхние заголовки. Общий заголовок обычно располагается над таблицей и выражает ее основное содержание. Помещенные слева боковые заголовки раскрывают содержание строк подлежащего, а верхние – вертикальных граф (сказуемого таблицы).

Распределение курящих студентов по факультетам

Наименование отделения	**Курящие студенты**	
	абсолютное число студентов	**в %**
1. Сестринское дело	20	40
2. Лабораторная диагностика	15	30
3. Фармация	15	30
Итого:	50	100,0

Подлежащее – **перечень единиц совокупности**

Сказуемое – **цифровые данные, характеризующие подлежащее**

Статистические таблицы

Простые
- перечислены единицы изучаемой совокупности количественная характеристика одного признака

Групповые
- перечень групп

Комбинационные
-группировка по двум и более признакам

Простая таблица

Характер повреждения	Число больных
1.Изолированные	200
2.Множественные	400
3.Сочетанные	150
ИТОГО…	750

Групповые таблицы

Характер повреждений	Пол		Возраст, годы			ВСЕГО
	М	Ж	До 30	30-49	50 и старше	
1.Изолированные						
2.Множественные						
3.Сочетанные						
ИТОГО…						

Комбинационные таблицы

Характер повреждений	Мужчины			Женщины			Всего
	До 30	30-40	50 и старше	До 30	30-40	50 и старше	
1.Изолированные							
2.Множественные							
3.Сочетанные							
ИТОГО…							

После составления программы разработки составляется программа анализа.

2-й этап: сбор материала

Специфический метод → Метод массового наблюдения

Любое статистическое исследование, любое познание общественной жизни начинается со сбора сведений (данных фактов) об изучаемых явлениях и процессах.

На этом этапе исследователь собирает материал по программе не уклоняясь от неё.

3-й этап: разработка материала

Специфический метод → Метод сводки и группировки

1. Проверка собранного материала.
2. Разметка признаков по группам выбранных классификаций, шифровка (если она не проведена на этапе сбора материала).
3. Раскладка по группам.
4. Подсчет и внесение данных в таблицы.
5. Составление вариационных и динамических рядов.
6. Вычисление статистических показателей.
7. Графическое изображение данных.

Величины

Сатистический показатель – это количественная оценка изучаемого явления. Представляет собой их величину, выраженную соответствующей единицей измерения.

Абсолютные величины – всегда числа именнованные, имеющие определленную размерность, единицы измерения.

Абсолютные данные используются очень широко – нужны для общей характеристики явления или признака.

Например: численность населения в мире, число врачей, коек.

Когда нужны сравнения применяются относительные числа, получаемые различные путём различных отношений, сопоставлений.

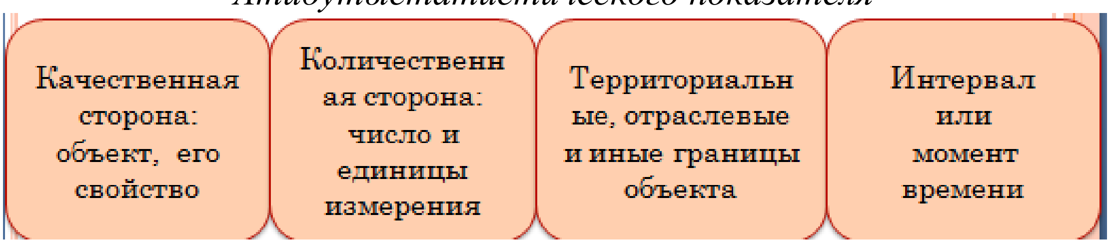
*Относительные величины*в статистике представляют частное от деления двух статистических величин, и характеризует количественное соотношение между ними, выражается либа в форме коэффициента, либо в процентах.

Показатели выражаются в процентах (*100), промиле (*1000), продецемиле (*10.000)

Нужно, чтобы поакзатель был удобен в использовании и выражался целой величиной.

Структуру некоторых явлений выражают в %, показатели рождаемости, смертности.

Атибутыстатистического показателя



Все статистические показатели по охвату единиц совокупности разделяются на: индивидуальные; сводные, а по форме выражения на: абсолютные; относительные; средние.

Статистический показатель

По охвату единиц совокупности

Индивидуальные – характеризуют отдельный объект или отдельную единицу

Сводные (обобщающие) - показатели исчисляются по всей совокупности в целом.

По форме выражения

Абсолютные – исходная первичная форма выражения статистических показателей совокупности

Относительные – показатели, выражающие определённые соотношения между количественными характеристиками

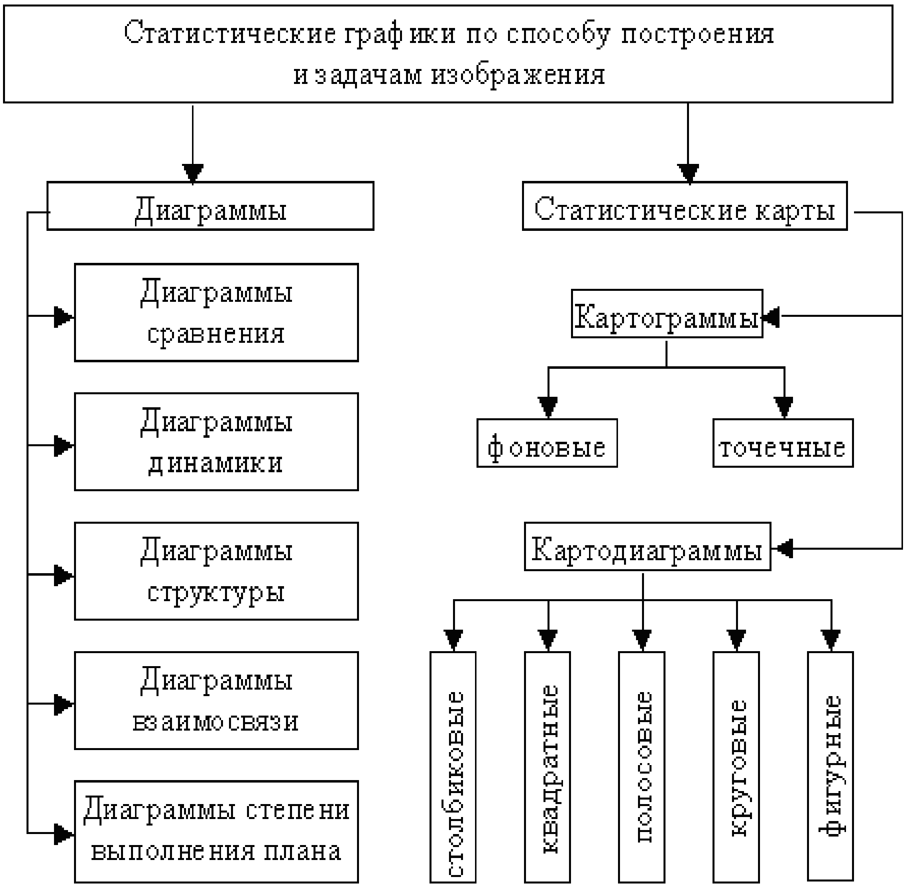
Средние – статистические показатели, характеризующая наиболее типичный уровень явления. Рассчитываются на единицу статистической

Коэффициенты – простые соотношения величин

Экстенсивный показатель	*Интенсивный показатель*
Охарактеризовать структуру явлений, показать долю признака или *распределение признака в данной совокупности*	Охарактеризовать частоту (интенсивность явления)
Часть явления/целое явление*100	Признак/сравниваемый признак*100
Структура смертности, структура заболеваемости, структура какой –то группы людей по возрасту или другому признаку.	Показатель рождаемости, смертности, заболеваемости в тех или иных группах людей в определенное время.

Графическое изображение

Для наглядности представления различных статистических величин, а также для их анализа широко используют графические изображения.

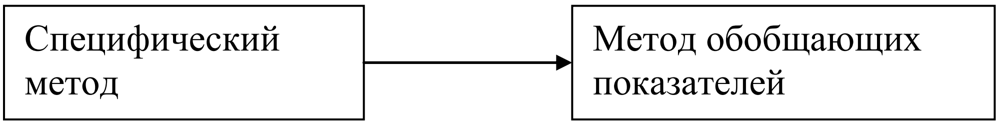


Диаграммы – изображение статистических данных в виде точек, линий, плоских фигур.

Картограммы – статистические данные на географической карте.

Картодиаграммы – диаграммы + картограммы.

4-й этап: анализ, выводы, предложения

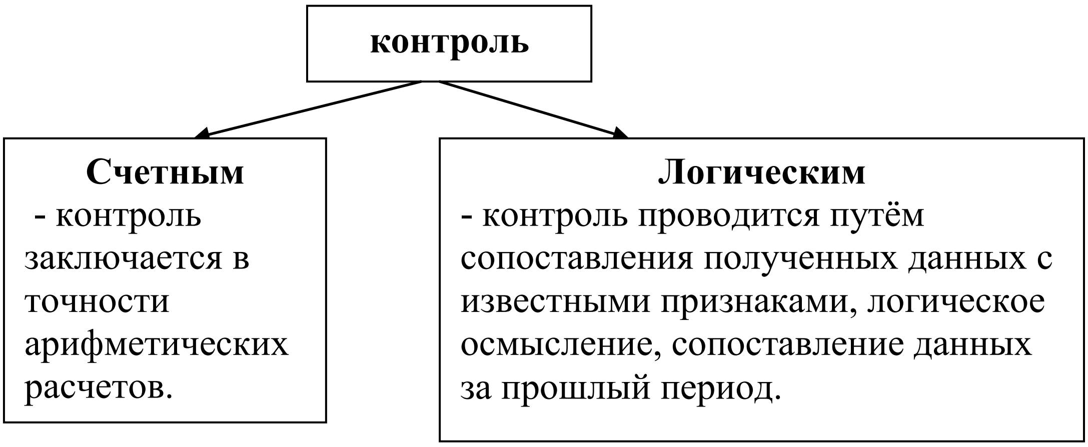


1. Осмысление полученных абсолютных данных, графическое изображений и статистических показателей, их сравнение:
   - с имеющимися нормативами;
   - со средними уровнями показателей;
   - со стандартами, например, физического развития;
   - с данными по другим учреждениям и территориям;
   - в динамике.
2. Оформление работы.
3. Выводы.
4. Проверка соответствия полученных выводов принятой гипотезе и задачам исследования.
5. Предложения для внедрения в практику.

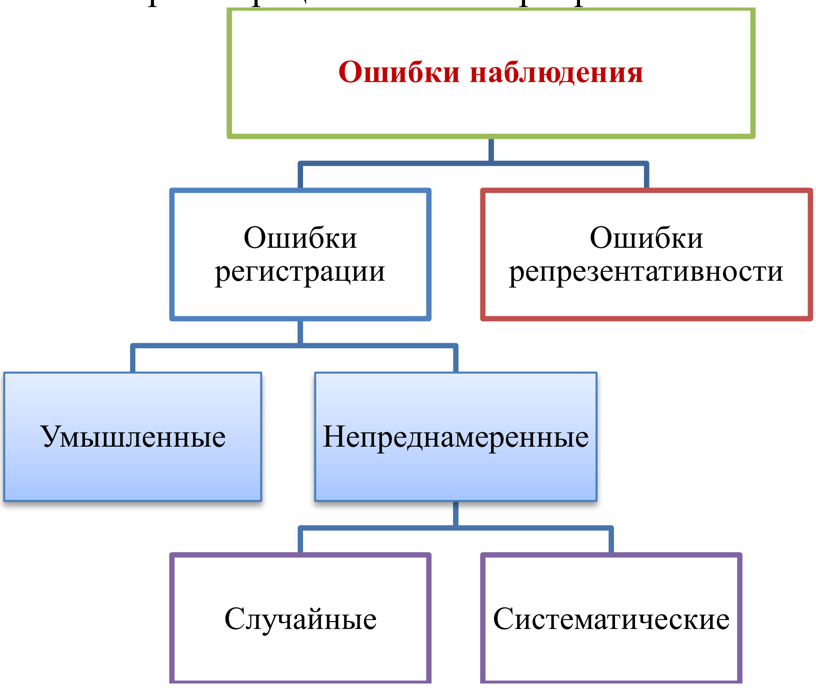
Результат наблюдения – данные характеризующие каждую единицу наблюдения.

Статистический материал, собранный в результате статистического наблюдения, должен быть точным и достоверным.

Поэтому первичный материал перед его обработкой подвергается предварительному контролю.



Точность – степень соответствия какого-либо показателя признака определенным по материалам статистического наблюдения действительной величине.Расхождение между расчетным и действительным значением называется ошибкой наблюдения в зависимости от причин возникновения различают: ошибки регистрации и ошибки репрезентативности.



Ошибки регистрации возникают вследствие неправильного установления фактов или неправильного их записи в формуляр.

Ошибки репрезентативности имеют место лишь при выборочном обследовании и возникают вследствие того, что выборочная совокупность недостаточно полно воспроизводит всю изучаемую совокупность.

Умышленные ошибки являются следствием сознательного искажения действительности в сторону увеличения или уменьшения истинных размеров исследуемого признака

Непреднамеренные ошибки возникают независимо от желания лиц, сообщающих или регистрируют данные

Случайные ошибки – результат действий случайных факторов (перепутаны строки, столбцы)

Систематические ошибки – всегда имеют тенденцию либо к завышению либо к занижению показателя (возраст)

Ошибки репрезентативности также могут быть случайными и систематическими.

3.Анализ медико-демографических показателей

Демография – наука о населении.

Демографическая статистика - изучает численность, состав (по возрасту, полу и т.д.), механическое (миграции) и естественное движение (рождаемости, смертности и др. процессов определяющих воспроизводство населения) и другими факторами условий и образа жизни людей.

Статистика населения основана на численном составе населения, которые изучают по ряду признаков: по полу, возрасту, национальности, месту жительства и т.д.

Демографические события изучаются с помощью переписей населения.

В России первые попытки проведения переписи населения были в XI-XII вв.

В XX столетии было проведено 8 переписей населения1920, 1926, 1937, 1939, 1959, 1970, 1979, 1989. Последняя перепись была в 2003 году.

Показатели статистик населения необходимы для:

- вычисления показателей естественного движения населения,
- планирования системы здоровья (расчета в потребности амбулаторно – поликлиничной и стационарной помощи)

Статистическое изучение народонаселения ведется в двух основных направлениях: статика населения и динамика населения.

Статика населения - изучает численность и состав населения, на определенный момент времени по следующим признакам:

- пол,
- возраст,
- социальные группы,
- национальность,
- язык,
- семейное положение,
- образование,
- место жительства (город, село),
- плотность населения и др.

Динамика населения - характеризуется движением и изменением количества населения. Изменение численности населения может происходить в силу следующих причин:

- механическое движение населения (вследствие миграционных процессов);
- естественное движение (воспроизводство) населения (обусловленное процессами рождаемости и смертности).

Естественное движение населения
(рождаемость, плодовитость, смертность)

Существенное значение для здоровья населения имеют показатели *естественного движения населения*, под которыми понимается изменение численности населения данной территории в результате рождаемости и смертности.

Для анализа и оценки интенсивности рождаемости используются следующие коэффициенты:

Общий коэффициент рождаемости = (общее число родившихся за год) / (среднегодовая численность населения)*1000

В оценке социального, демографического и медицинского благополучия той или иной территории необходимо учитывать показатели не только рождаемости, но и *смертности*.

Под общим показателем смертности понимается число умерших в определенном регионе в течении года на 1000 населения:

Общий показатель смертности = (общее число умерших за год)/ (среднегодовая численность населения)*1000

Естественный прирост населения

Может выражаться абсолютным числом, как разность между числом родившихся и умерших за год: **Е = Р-У**

Но чаще рассчитывают по формуле:

Показатель естественного прироста населения = (число родившихся – число умерших) / (среднегодовая численность населения)*1000

Отрицательный прирост свидетельствует о вымирании нации.

Контрольные вопросы для закрепления:

1. Разделы медицинской статистики и их содержание
2. Охарактеризуйте каждый этап статистического исследования.
3. Раскройте методы и способы отбора единиц исследования, их группировку.
4. Понятие статистической таблицы, виды статистической таблицы, пример.
5. Понятие статистического показателя, примеры статистического показателя.
6. Отличие интенсивного показателя от экстенсивного.
7. Графическое изображение статистических данных, примеры.
8. Демография, медицинская демография.
9. Формулы расчета естественного движения населения?

Применение математических методов в области профессиональной деятельности

План:

1. Понятие процента. Концентрация растворов.
2. Приложение математики в фармакологии
3. Приложение математики в педиатрии
4. Приложение математики к анатомии и физиологии
5. 5. Применение математических методов при проведении исследований в клинико-диагностической лаборатории

1.Понятие процента. Концентрация растворов

Слово *«процент»* происходит от латинских слов procentum, что буквально означает «со ста».

Проценты дают возможность легко сравнивать между собой части целого, упрощают расчеты и поэтому распространены.

Широко начали использовать проценты в Древнем Риме, но идея процентов возникла много раньше – вавилонские ростовщики уже умели находить проценты.

Вспомним основные действия с процентами.

1. Чтобы найти указанный процент данного числа, необходимо число умножить на значение процента и разделить на 100.

Пример: Отделение функциональной диагностики обслуживало 40 чел в день. После внедрения компьютерных технологий пропускная способность отделения увеличилась на 35%. Сколько человек стало обслуживать отделение?

$$100\% + 35\% = 135\% \qquad \frac{40 \cdot 135\%}{100\%} = 54\,чел$$

2. Чтобы найти исходное число по указанному проценту, необходимо данное число разделить на значение процента и умножить на 100

*Пример:*26 человек поступили в трампункт с переломом конечностей, что составило 13% от всех обратившихся. Сколько человек поступило в трампункт?

$$\frac{26}{13\%} \cdot 100\% = 200\,чел$$

3. Чтобы найти выражение одного числа в процентах другого, необходимо первое число разделить на второе и умножить на 100.

Пример: С наступлением холодов число с ОРЗ увеличилось до 15 человек в день, а до этого составляло около 10 человек. На сколько процентов возросло число больных с ОРЗ?

$$15 - 10 = 5\,чел \qquad \frac{5}{10} \cdot 100\% = 50\%$$

Каждый раствор характеризуется концентрацией растворенного вещества.

Концентрация - это величина, показывающая содержание данного вещества в определенном количестве растворителя.

Каждый раствор характеризуется концентрацией растворенного вещества.

Весовая процентная концентрация раствора показывает, какой процент от общего веса раствора составляет растворенное вещество.

Решать задачи на определение концентрации удобнее с помощью пропорции.

Если твердое вещество (число В) составляет С% от массы раствора (числа А), то условно можно записать так:

$$\boxed{\begin{array}{l} A - 100\% \\ B - C\% \end{array}}$$

Процентная концентрация растворов.

Отношение массы растворенного вещества к массе раствора и умноженное на 100%.

$$C = \frac{m_{в-ва}}{m_{р-ра}} \bullet 100\% \qquad m_{р-ра} = m_{в-ва} + m_{воды}$$

Пример: 50 г вещества растворены в 200 г воды. Определить процентную концентрацию вещества.

Краткая запись:

$m_{в-ва} = 50$ г

$m_{р-ра} = 200$ г

Определить процентную концентрацию вещества.

Решение:

$$C = \frac{m_{в-ва}}{m_{р-ра}} \bullet 100\% = \frac{50г}{50г + 200г} \bullet 100\% = 20\%$$

Пример: Сколько нужно соли для приготовления 500 г 3% раствора?

Решение: Составим пропорцию

500 г.-100%

соль-3%

Получаем

$$соль = \frac{500 \cdot 3\%}{100\%} = 15г$$

Следовательно, соли нужно 15 г., а воды 500-15=485 г

Процентная концентрация раствора показывает, какое количество сухого вещества растворено в 100ml.

Раствор глюкозы 40%⇒40 граммов сухой глюкозы растворили в 100 ml воды.

Часто приходится решать задачи на разбавление, упаривание и смешивание растворов и после чего определить их концентрацию

Если в смешивании участвует вода, то ее концентрация берется равной 0%.

Задачи:

Разбавление.

К 15% раствору, масса которого 80г., добавили 30г. воды. Какой стала концентрация раствора? (Ответ 10,9)

Решение:

15г. - 100г. раствора

X г. - 80г

X=15*80/100=12г.

В результате добавления воды, вещества остаётся столько же:

12г. - 110 (80+30)

X г.- 100г.

X=12*100/110=10,9г.

10,9г. - 100г. = 10,9%

Упаривание.

Из 300г. 10% раствора выпарили 150г. воды. Какова концентрация нового раствора?

Решение:

300г. - Xг.

100г. - 10г.

X=300*10/100=30г. вещ.

(300 - 150) 150г. - 30г.

100г. - Xг.

X=100*30/150=20г.

20г. - 100г. = 20%

Смешение.

Смешаны 200г 20% раствора и 50г. 16% раствора хлорида калия. Какова концентрация полученного раствора?

Решение:

200г. - 20%

+

50г. - 16%

200г. - X

100г. - 20   X=200*20/100=40г.

50г.   - X

100г. - 16   X= 50*16/100=8г.

250г. - 48

100г. - X   X=100*48/250=19,2г.

Ответ: 19,2%

Пропорции

Иногда концентрацию раствора пишут в таком виде 1:200. Что означает 1 гр. вещества содержится в 200 гр. раствора.

1:1000	1,0 - 1000
1:400	0,1 - 100
1:5000	

2. Приложение математики в фармакологии

В медицине используются 3 основных метрических единицы: метр-мера длины, грамм-мера массы и литр-мера объема.

Необходимо также знать распространенные сокращения и метрические системы измерения.

Приставка	Числовое значение	Сокращенное обозначение
Атто	10^{-18}	а
Фемто	10^{-15}	ф
Пико	10^{-12}	п
Нано	10^{-9}	н
Микро	10^{-6}	мк
Милли	10^{-3}	м
Санти	10^{-2}	с
Деци	10^{-1}	д
Дека	10	да
Гекто	10^{2}	г
кило	10^{3}	к
Мега	10^{6}	М

Доза лекарственного вещества указывается в десятичной системе измерения.

За единицу веса принимается: 1 грамм, т.е. вес 1 мл (см^3) дистиллированной воды при температуре 4^0. В рецепте это обозначается 1,0.

При дозировании лекарств пользуются и величинами менее 1,0 грамма, например, 1дециграмм, 1 сантиграмм.

0,1 г = 1 дг

0,01 г=1сг

0,001 г=1 мг

0,0001 г=1дмг

0,00001 г=1смг

0,000001 г=1мкг

Единицы измерения жидких лекарственных форм

Капли дистиллированной воды: 20 капель – 1мл. вес капли – 5 сантиграмм.

Объём:

Столовая ложка – 15 мл.

Десертная ложка – 10 мл.

Чайная ложка – 5 мл.

Пример: У медицинской сестры имеется 2-х процентный раствор лекарственного препарата. Определите, какое количество сухого вещества содержится в одной столовой ложке.

Решение:

2 гр. – 100 ml.

Xгр.- 15 ml.

$$x = \frac{2гр. \bullet 15\,ml}{100\,ml}$$

X= 0,3гр.

Пример: Больной принимает лекарство столовыми ложками. Разовая доза составляет 75сг. Определить процентную концентрацию раствора.

Краткая запись:

1 ст. ложка -15 ml

$Р_д$ = 75сг = 0,75 г.

х %-?

Решение:

Составим пропорцию

15 ml – 0,75г

100 ml – х %

$$x = \frac{0{,}75гр. \bullet 100ml}{15ml} = 5гр.$$

Ответ: концентрация раствора 5%

Формула расчета разовой дозы препарата

Давая больному таблетки и капсулы, нужно помнить: дозировка препарата, имеющегося у вас, и дозировка, назначенная врачом, должны быть в одинаковых единицах измерения.

Так если врач назначил 1 г препарата, а у медсестры таблетки препарата по 500 мг, то она должна знать, что 1 г=1000 мг, и таким образом дать больному 2 таблетки.

Для расчета дозы препарат можно использовать следующую формулу,

$$\textbf{Разовая доза препарата} = \frac{\textbf{Требуемая доза}}{\textbf{Количество препарата в таблетке}}$$

, где

требуемая доза-это доза, назначенная врачом,

Пример: Таблетка содержит 0,02, т.е. 2 сантиграмма вещества. Назначение врача - 5 мг. Сколько таблеток необходимо дать пациенту?

Решение:

В 1 мг – 0, 001 г, в 5 мг – 0,005 г.

$$\textit{Разовая} \quad \textit{доза} = \frac{0{,}005}{0{,}02} = \frac{1}{4}\textit{таблетки}$$

Следует также обратить внимание, что некоторые препараты дозируются не в единицах метрической системы (например, граммах), а в ЕД или МЕ.

В *ЕД (единицах действия)* измеряются, например, антибиотики, инсулин, панкреатин, нистатин, ботокс.

На флаконе антибиотика могут быть указаны граммы или миллиграммы, или ЕД.

МЕ (международная единица) - в фармакологии это единица измерения количества вещества, основанная на биологической активности. Используется для витаминов, гормонов, некоторых лекарств, вакцин, составляющих крови и подобных биологически активных веществ.

Помнить: соответствие 1г = 1 000 000 ЕД.

Разведение антибиотиков

Соотношение 1:1	Соотношение 1:2
1 г сухого вещества растворить в 10 мл растворителя	1 г сухого вещества в 5 мл растворителя
1 мл раствора 100 000 ЕД вещества	1 мл раствора 200 000 ЕД вещества

Например:

Во флаконе 1 000 000 ЕД пенициллина. Для этого флакона нам понадобится: 1 000 000 ЕД : 100 000 ЕД = 10 мл растворителя.

Во флаконе 500 000 ЕД пенициллина. Для этого флакона нам понадобится растворителя: 500 000 ЕД : 100 000 ЕД = 5 мл растворителя.

Во флаконе 250 000 ЕД пенициллина. Для этого флакона нам понадобится растворителя: 250 000 ЕД : 100 000 ЕД = 2,5 мл растворителя.

Суточная и разовая дозы для антибиотиков рассчитываются по формулам:

$$\text{Доза}_{\text{суточная}} = \text{Доза} * m_{\text{пациента}}$$

$$\text{Доза}_{\text{разовая}} = \frac{\text{Доза}_{\text{суточная}}}{\text{Число инъекций}}$$

Пример: Пациенту необходимо ввести 500 000 ЕД пенициллина. В процедурном кабинете имеются флаконы по 0,25 г. Сколько флаконов необходимо взять? Сколько мл растворителя необходимо для каждого флакона? Сколько мл разведённого антибиотика надо набрать в шприц?

Решение: Флаконы по 0,25 г. или 250 000 ЕД. Пациенту необходимо сделать 500 000 ЕД. 500 000 ЕД : 250 00 ЕД = 2, т.е понадобится 2 флакона.

Т.к. флаконы по 250 000 ЕД, то необходимо по 2,5 мл растворителя для каждого флакона (всего во флаконе 250 000 ЕД, по стандартному разведению на каждые 100 000 ЕД берут 1 мл растворителя, поэтому 250 000 ЕД: 100 000 ЕД = 2,5 мл растворителя).

5 мл разведённого а/б, т.к. в 5 мл содержится 500 000 ЕД, которые необходимо сделать пациенту.

Пример: Во флаконе 1 000 000 ЕД пенициллина. Для разведения использовали 10 мл раствора новокаина. Назначение врача: необходимо сделать инъекцию 90 000 ЕД.

Вычислить:

1. Сколько мл раствора вы набираете в шприц для инъекции?
2. Сколько остается во флаконе мл раствора антибиотика?
3. Сколько остается во флаконе ЕД антибиотика?

Решение:

1. Сколько мл раствора вы возьмете в шприц для инъекции?
   Составим пропорцию:
   1 000 000 ЕД – 10 мл
   90 000 ЕД – X мл $\Longrightarrow$ $x = \dfrac{90000\text{ЕД} \cdot 10\text{мл}}{1000000\text{ЕД}} = 0{,}9\text{мл}$
2. Сколько мл раствора антибиотика останется во флаконе?
   10 мл – 0,9 мл = 9,1 мл
3. Сколько остается во флаконе ЕД антибиотика?
   1 000 000 ЕД – 90 000 ЕД = 910 000 ЕД

Ответ: 0,9мл ; 9.1 мл ; 910 000 ЕД.

Расчет инсулина

Инсулин выпускается во флаконах по 40 ЕД/мл или по 100 ЕД/мл. Они содержат 40 ЕД инсулина в 1 мл или 100 ЕД инсулина в 1 мл

В настоящее время для введения инсулина выпускаются специальные шприцы, откалиброванные в ЕД

Т.о., если врач назначает 25 ЕД инсулина, то вы должны набрать препарат в шприц до отметки 25 ЕД из соответствующего вашему шприцу флакона.

Иногда, при отсутствии инсулинового шприца, необходимо уметь рассчитать нужное количество инсулина в мл и ввести его обычным шприцом.

В 1 мл 40 ЕД

Пример: Набрать в шприц 24 ЕД инсулина. Сколько это мл?

Решение: Составим пропорцию:

40 ЕД – 1 мл
24 ЕД – Х мл

$$x = \frac{24ЕД \cdot 1мл}{40ЕД} = 0{,}6мл$$

Ответ: Для введения 24 ЕД необходимо набрать в шприц 0,6 мл инсулина.

3. Приложение математики в педиатрии

Средние медицинские работники ведут наблюдение за состоянием развития и здоровья детей раннего возраста.

Также первый вопрос, который задают счастливой паре после рождения малыша, касается пола младенца, во вторую очередь уточняют вес и рост новорожденного. Чем обусловлен интерес к этим данным, и на какие показатели следует ориентироваться родителям, озабоченным нормальным развитием долгожданного крохи?

Под физическим развитием человека понимается совокупность морфологических и функциональных признаков организма в их взаимосвязи. Интенсивно протекающие процессы роста и созревания детского организма определяют его особую чувствительность к условиям внешней среды. На физическом развитии детей заметно отражаются особенности климата, жилищно-бытовые условия, режим дня, характер питания, а также перенесенные заболевания. На темпы физического развития влияют также наследственные факторы, тип конституции, интенсивность обмена веществ, эндокринный фон организма, активность ферментов крови и секретов пищеварительных желез.

При оценки физического развития детей учитываются морфологические показатели: длина и масса тела, окружность грудной клетки, а у детей до 3 лет-окружность головы.

Антропометрический метод исследования – изучает тело человека и его части путём измерения, определения пропорции тела, соотношение мышечной, костной и жировой тканей, степень подвижности суставов и т.д.

Оценка физического развития детей

Длина тела. Показатель длины тела является наиболее стабильным по сравнению с другими показателями физического развития. Наибольший темп роста отмечается в первые три месяца жизни ребенка.

Масса тела. Это лабильный показатель, который может изменяться под влиянием конституциональных особенностей, нервно-эндокринных и соматических нарушений; он также зависит от экзогенных причин (питание, режим).

Наиболее интенсивная прибавка массы тела ребенка отмечается на первом году жизни и в пубертатном периоде.

Средняя масса тела новорожденных мальчиков 3494 г, девочек - 3348 г. Масса тела ребенка к 4-4,5 мес. удваивается, к году утраивается.

Окружность головы и грудной клетки. При рождении окружность головы у доношенных детей 33-37,5 см, она не должна превышать окружность грудной клетки больше чем на 1—2 см. В первые 3-5 мес. ежемесячная прибавка составляет 1-1,5 см, а затем 0,5-0,7 см в месяц.

К году окружность головы увеличивается на 10-12 см и достигает 46-48 см. Окружность головы ребенка в возрасте 1-3 лет увеличивается на 1 см в год. С 4 лет окружность головы ежегодно увеличивается на 0,5 см. К 6 годам она равна 50-51 см, а за все последующие годы увеличивается на 5-6 см.

Окружность грудной клетки у новорожденных 33- 35 см. Ежемесячная прибавка на первом году жизни составляет в среднем 1,5-2 см. К году окружность грудной клетки увеличивается на 15-20 см, затем интенсивность нарастания этого показателя снижается, и к дошкольному возрасту окружность грудной клетки в среднем увеличивается на 3 см, а в школьном - на 1-2 см в год. Переднезадний размер грудной клетки у большинства доношенных новорожденных меньше поперечного размера или равен ему. Уже в конце первого года жизни поперечный размер начинает превышать переднезадний и форма грудной клетки начинает приближаться к конфигурации взрослого, т. е. уплощается.

Индивидуальную оценку физического развития проводят путем сопоставления антропометрических показателей ребенка с нормативами и стандартами, разработанными специально для данного региона с учетом этнической принадлежности ребенка и климатогеографических условий проживания.

n - возраст	**Масса (кг)**	**Длина тела (см)**	**Окружность головы (см)**	**Окружность груди (см)**
1,…, 6 месяц	$m_д=m_р+800n$	$l_д=l_р+\Delta l_1$	$Ог_д=Ог_р+\Delta Ог_1$	$Огр_д=Огр_р+\Delta O_1$
7,..,12 месяц	$m_д=m_р+(800*6)+400(n-6)$			
1-5 лет	$m_д=10+2n$	$l_д=75+5n$	$Ог_д=Ог_р+\Delta Ог_2$	$Огр_д=Огр_р+\Delta O_2$
5 – 10 лет	$m_д=20+3(n-5)$	$l_д=100+6(n-5)$	$Ог_д=Ог_р+\Delta Ог_3$	
12 –15 лет	$m_д=n*5-20$кг	$l_д=130+\Delta l_2$		$Огр_д=Огр_р+\Delta O_3$
		$\Delta l_1=$ Iкв. -3 см в мес. IIкв.-2,5 см в мес. IIIкв.-1,5 см в мес IV кв. -1 см в мес. Δl_2=на каждый последующий год по 5 см.	$\Delta Ог_1$=на 1 см в мес. $\Delta Ог_2$=по 1 см в год $\Delta Ог_3$=по 0,5 см в год	ΔO_1=на 1 см в мес. ΔO_2=на 1,5 см в год ΔO_3=на 3 см в год

Артериальное давление у детей зависит от возраста, пола, биологической зрелости, величины ударного минутного объема сердца, сопротивления сосудов и других показателей.

n - возраст	**Артериальное давление (мм.рт.ст.)** $АД_{max}$ – **систолическое** $АД_{min}$ – **диастолическое** $АД_{min}=2/3-1/2\ АД_{max}$
1,…, 6 месяц	$АД_{max}=76+2n$
7,..,12 месяц	
1-5 лет	$АД_{max}=80+2n$
5 – 10 лет	$АД_{max}=100+n$
12 –15 лет	$АД_{max}=120$ мм.рт.ст

Расчет питания для детей первого года жизни

При искусственном вскармливании детей первых месяцев жизни, как правило, рекомендуется 6-7-разовое кормление через 3 или 3,5 часа с 6,5 или 6-часовым перерывом.

При этом важно определить необходимый объем питания. Самым точным является "калорийный" метод расчета, основанный на физиологической потребности ребенка в энергии, которая в первом полугодии составляет 115 ккал/кг, во втором - 110 ккал/кг массы тела.

Для ориентировочного расчета может применяться объемный метод. При этом суточный объем пищи, необходимый ребенку со средним уровнем физического развития, составляет в возрасте от 10 дней до 2 месяцев - 1/5 массы тела, от 2 до 4 месяцев - 1/6 массы тела, от 4 до 6 месяцев - 1/7, от 6 мес. до 1 года - 1/8-1/9 массы тела. Этот объем не включает воду, не входящую в состав молочной смеси, и соки.

Объёмный метод

10 дней – 2 мес.	**1/5 массы тела**
2-3 мес.	**1/6 массы тела**
3-6 мес.	**1/7 массы тела**
6-12 мес.	**1 литр**

Калорийный метод

1-3 мес.	**120 ккал/кг массы тела**
4-6 мес.	**115 ккал/кг массы тела**
7-9 мес.	**110 ккал/кг массы тела**
10-12 мес.	**100 ккал/кг массы тела**
1г. – 3 лет	**100 ккал/кг массы тела**
4-6 лет	**90 ккал/кг массы тела**
7-9 лет	**80 ккал/кг массы тела**
10 – 12 лет	**70 ккал/кг массы тела**

Примечание: Молоко женское 1л = 700 ккал.

Задача: Ребёнку 4 года. Определить какое количество молока он должен получить, если масса тела 19 кг.

Для определения *разовой* потребности в пище суточный объём пищи делят на число кормлений.

Питание после 1 года изменяется по сравнению с питанием ребёнка грудного возраста. Это связано с развитием жевательного аппарата.

Суточный объём пищи постепенно повышается из расчета: 1000+100n (ml), где n -число лет. Объём и калораж пищи в течение дня на втором году жизни распределяется равномерно, затем на завтрак -25% калоража, на обед - 35-40%, полдник 10 %, ужин 20-25 %. Необходимыми соотношениями между белками, жирами и углеводами в возрасте 1 -1,5 лет считаются 1:1,2:4, в дошкольном - 1:1:3,5.

4. Приложение математики к анатомии и физиологии человека

Дыхание — это единый процесс, осуществляемый целостным организмом и состоящий из трех неразрывных звеньев: а) внешнего дыхания, то есть газообмена между внешней средой и кровью легочных капилляров; б) переноса газов, осуществляемого системами кровообращения; в) внутреннего (тканевого) дыхания, то есть газообмена между кровью и клеткой, в процессе которого клетки потребляют кислород и выделяют углекислоту

ЖЕЛ = ДО + Ровдоха + РОвыдоха

МОД=ДО*ЧД

МАВ=(ДО-МП)*ЧД

Жизненная ёмкость легких (ЖЁЛ)–это количество воздуха, который человек выдыхает при максимальном выдохе после максимального вдоха.

Включает дыхательный объем, резервный объем вдоха, резервный объем выдоха и остаточный объем.

ЖЕЛ = ДО (300-800) + РОвдоха (2000-3000) + РОвыдоха (1000-1500)

Дыхательный объем (ДО) – это количество воздуха поступающего в легкие во время спокойного вдоха. Его величина 300-800 мл. У мужчин в среднем 600-700 мл, у женщин 300-500 мл.

Резервный объем вдоха (РОвдоха) – это количество воздуха, которое можно дополнительно вдохнуть после спокойного вдоха. Он составляет 1500-2000 мл. Этот объем определяет резервные возможности дыхания, т.к. за счет него возрастает дыхательный объем при физической нагрузке.

Резервный объем выдоха (РОвыдоха) – это объем воздуха, который можно дополнительно выдохнуть после спокойного выдоха. Он равен 1500 -2000мл.

Максимальный объем дыхания – это то количество воздуха, которое проходит через легкие в минуту. Вычисляется по формуле:

МОД=ДО*ЧД, где ДО-дыхательный объем, ЧД - частота дыхания.

В покое частота дыхания у человека составляет 16 в минуту, а объем выдыхаемого воздуха-500 мл.

Так, внешнее дыхание, или вентиляция легких обеспечивает поступление в легкие примерно 500 мл воздуха во время каждого вдоха (ДО). Насыщение крови кислородом и удаление углекислого газа происходит при контакте крови легочных капилляров с воздухом, содержащимся в альвеолах. Альвеолярный воздух – это внутренняя газовая среда организма млекопитающих и человека. Ее параметры – содержание кислорода и углекислого газа – постоянны. Количество альвеолярного воздуха примерно соответствует функциональной остаточной емкости легких – количеству воздуха, которое остается в легких после спокойного выдоха, и в норме равно 2500 мл. Именно этот альвеолярный воздух обновляется поступающим по дыхательным путям атмосферным воздухом. Следует иметь в виду, что в легочном газообмене участвует не весь вдыхаемый воздух, а лишь та его часть, которая достигает альвеол. Поэтому для оценки эффективности легочного газообмена важна не столько легочная, сколько альвеолярная вентиляция. часть дыхательного объема не участвует в газообмене, заполняя анатомически мертвое пространство дыхательных путей – примерно 140 – 150 мл. Кроме того, есть альвеолы, которые в данный момент вентилируются, но не снабжаются кровью. Эта часть альвеол является альвеолярным мертвым пространством.

Расчет *альвеолярной вентиляции* проводится по формуле:

МАВ = (ДО - МП) ´ ЧД, где МАВ - минутная альвеолярная вентиляция, ДО - дыхательный объем, МП - объем мертвого пространства, ЧД - частота дыхания. Минутная альвеолярная вентиляция определяет газообмен.

Показатели сердечной деятельности

Минутный объем крови, как и систолический, может быть у каждого человека своим, эта величина непостоянная и может изменяться в зависимости от состояния организма и его активности. Минутный объем крови имеет аббревиатуру МОК и выступает одним из важнейших параметров для определения количества данной жидкости, которую выбрасывает желудочек сердца в течение 1 минуты. С помощью этого параметра можно диагностировать различные сердечные заболевания.

МОК равен произведению ударного объема на частоту сердечных сокращений (в норме в покое - 4-6 л/мин.: МОК=УО*ЧСС

Ударный (систолический) объем крови- количество крови, которое нагнетается каждым желудочком в магистральный сосуд (аорту или легочную артерию) при одном сокращении сердца. В покое ударный объем составляет 70-100 мл крови. Частота сердечных сокращений в покое имеет норму-60-80 раз в 1 мин.

5. Применение математических методов при проведении исследований в клинико-диагностической лаборатории

Оценка методов исследований в лабораторной диагностике производится с применением методов математической статистики и теории вероятности.

Основными задачами КДЛ является проведение необходимых клинических лабораторных исследований и повышение их качества. Качество лабораторных исследований должно соответствовать требованиям по аналитической точности, установленным нормативными документами Минздрава России, что является обязательным условием надежной аналитической работы КДЛ. Важным элементом обеспечения качества является внутрилабораторный контроль качества, который состоит в постоянном (повседневном в каждой аналитической серии) проведении контрольных мероприятий: исследовании проб контрольных материалов или применении мер контроля с использованием проб пациентов.

Внутрилабораторный контроль качества в клинико-диагностической лаборатории - комплекс мероприятий направленных на обеспечение качества клинических лабораторных исследований.

Целью внутрилабораторного контроля является оценка соответствия результатов исследований установленным критериям их приемлемости при максимальной вероятности погрешности и минимальной вероятности ложного отбрасывания результатов выполненных лабораторией аналитических серий.

Внелабораторные ошибки в лабораторной диагностике – возникают еще до поступления исследуемого материала в лабораторию. Они зависят от работы сотрудников лаборатории.

Оценка систематической погрешности

среднее арифметическое значение	$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
относительная систематическая погрешность	$B = \frac{\bar{X} - АЗ}{АЗ} x\,100\%$

Среднее арифметическое значение (X) используется при расчете систематической погрешности, которая характеризует *правильность измерений*, которое определяется близостью среднего арифметического значения результатов повторных измерений контрольного материала (X) к аттестованному значению (АЗ) измеряемой величины.

Систематическая погрешность может быть выражена в относительных величинах. Относительная систематическая погрешность, или смещение (B), не зависит от единиц измеряемой величины и выражается в процентах, характеризует систематическую погрешность.

Правильность измерений - качество измерений, отражающее близость к нулю систематических погрешностей в их результатах.

Оценка случайной погрешности

среднее квадратическое отклонение	$S = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(Xi - \bar{X})^2}{n-1}}$
коэффициент вариации	$CV = \dfrac{S}{\bar{X}} \cdot 100\%$

Среднее квадратическое отклонение (S) и коэффициент вариации (CV) служат характеристикой случайных погрешностей и используются для оценки *сходимости* и *воспроизводимости измерений* и служат характеристикой случайных погрешностей .

Сходимость измерений - качество измерения, отражающее близость друг к другу результатов измерений одной и той же величины, выполненных повторно одними и теми же средствами, одним и тем же методом в одинаковых условиях и с одинаковой тщательностью.

Воспроизводимость измерений – качество измерений, отражающее близость друг к другу результатов измерений, одной и той же величины, выполненных в разных условиях (в разных местах, разными методами, разными средствами, разными операторами, в разное время), но приведенных к одним и тем же условиям измерений (температуре, давлению, влажности и др.). Воспроизводимость результатов измерений - отсутствие существенных различий между ними при измерениях, выполняемых в разных условиях (в различное время, в разных местах)

Принцип проведения внутреннего контроля качества достаточно прост: в течение не менее чем 20 сут. (обычно 20-30 сут.) ежесуточно делают два параллельных анализа контрольной сыворотки и из результатов определений вычисляют среднюю величину.

Значительно отличающиеся результаты определения («выскочки») исключают. Полученные усредненные значения используют для нахождения среднего арифметического.

В качестве показателя разброса результатов относительно средней $\bar{x}$, принято использовать величину стандартного отклонения (среднеквадратического отклонения) S.

Коэффициент вариации характеризует воспроизводимость лабораторных исследований. Воспроизводимость результатов исследований характеризуется степенью их совпадения при многократном исследовании одной и той же пробы биологического материала. Воспроизводимость выражается величиной, обратной коэффициенту вариации результатов. Чем меньше коэффициент вариации, тем выше воспроизводимость. Учитывая клиническое назначение методов лабораторной диагностики, устанавливают также медицинские допустимые пределы погрешности, определяемые по изучению мнений экспертов-клиницистов.

В большинстве лабораторий измерения проводятся дважды в день (обычно в начале и конце рабочего дня), среднюю арифметическую этих двух измерений наносят на контрольную карту.

Контрольная карта - графическое изображение сопоставимых измеряемых величин, наносимых на график по мере их получения

Контрольная карта представляет собой график, на оси абсцисс которого откладывают номер аналитической серии (или дату ее выполнения), а на оси ординат - значения определяемого показателя в контрольном материале. Через середину оси ординат проводят линию, соответствующую средней арифметической величине X, и параллельно этой линии отмечают линии, соответствующие контрольным пределам:

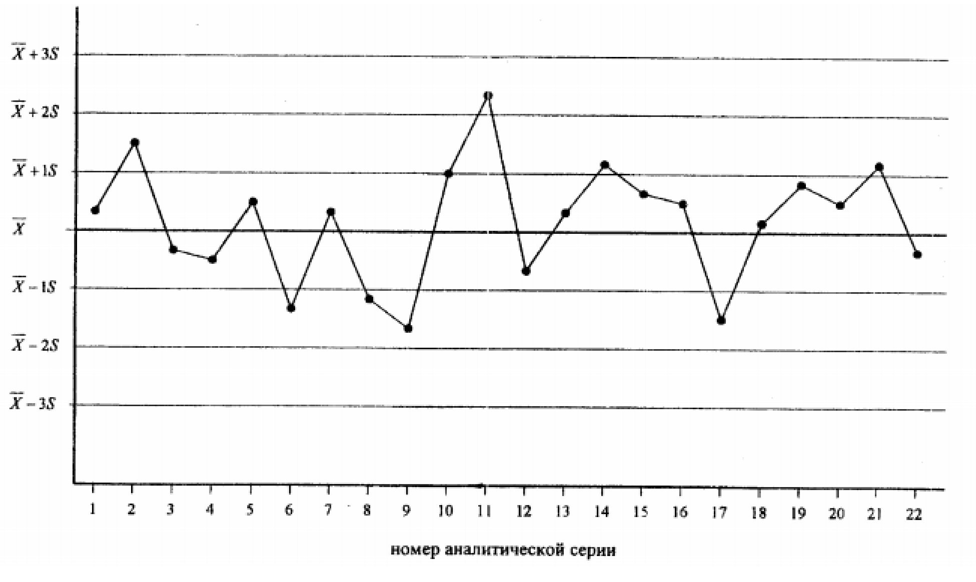
X ± 1S

X ± 2S

X ± 3S

Оценку результатов исследования контрольных материалов проводят с использованием контрольных правил Westgard.

Контрольные карты строятся для каждого лабораторного показателя и для каждого контрольного материала, предназначенного для оперативного контроля качества:



Контрольные вопросы для закрепления:

1. Понятие процента, концентрации раствора. Расчет концентрации раствора.
2. Приложение математики в фармакологии. Метрические единицы измерения. Расчет дозы препарата.

3. Разведение антибиотиков и инсулина.
4. Приложение математики в педиатрии. Антропометрические показатели детей. Расчет питания детей первого года жизни.
5. Показатели дыхания и сердечной деятельности человека.
6. Применение математических методов при внутрилабораторном контроле качества в КЛ.

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Омельченко, В. П. Математика : учеб. пособие / В. П. Омельченко, Э. В. Курбатова. - 7-е изд. - Ростов н/Д : Феникс, 2013. - 380 с.

Дополнительная литература

2. Математика [Электронный ресурс] : сб. тестовых заданий с эталонами ответов для студентов 1 курса по специальностям 31.02.03 - Лабораторная диагностика, 33.02.01 - Фармация, 34.02.01 - Сестринское дело (очная форма обучения) / сост. Е. П. Клобертанц, Л. Ю. Позднякова ; Красноярский медицинский университет, Фармацевтический колледж. - Красноярск : КрасГМУ, 2015. – Режим доступа: http://krasgmu.ru/sys/files/colibris/51659_6946_1430132715_sbornik_testov_matematika.pdf

3. Математика [Электронный ресурс] : учеб. пособие для студентов 1 курса по специальностям 31.02.03 - Лабораторная диагностика, 33.02.01 - Фармация, 34.02.01 - Сестринское дело (очная форма обучения) / сост. Е. П. Клобертанц, Л. Ю. Позднякова ; Красноярский медицинский университет, Фармацевтический колледж. - Красноярск : КрасГМУ, 2015. – Режим доступа: http://krasgmu.ru/sys/files/colibris/51660_6947_1430132715_uchebnoe_posobie_matematika.pdf

Электронные ресурсы:

ЭБС КрасГМУ «Colibris»;
ЭБС Консультант студента ВУЗ;
ЭБС Консультант студента Колледж;
ЭБС Айбукс;
ЭБС Букап;
ЭБС Лань;
ЭБС Юрайт;
СПС КонсультантПлюс;
НЭБ eLibrary.

Типография КрасГМУ
Заказ № 8215

660022, г.Красноярск, ул.П.Железняка, 1