ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИКА, СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПСИХОЛОГИИ»

(Специальность 030401.65-клиническая психология)

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №10

ТЕМА: Множества.

Понятие множества

Понятие множества, с одной стороны, может быть охарактеризовано как совокупность объектов, обладающих определенным свойством. Так, можно привести в пример множество всех студентов данного факультета, множество всех слов, начинающихся на «м», множество всех точек координатной плоскости, множестве всех нетривиальных решений системы алгебраических уравнений и т.д. С другой стороны, его можно определить как объект, для которого выполняются следующие условия:

1. Существует *правило*, приписывающее указанный элемент данной совокупности.
2. Элементы этой совокупности *отличны друг от друга*: то есть множество не содержит двух одинаковых элементов.

Традиционно множества обозначаются большими латинскими буквами: A, B, C... Если элемент *x* принадлежит множеству *A*, то это обозначается:

$$x \in A.$$

Элементы множества *неупорядочены*. Например, если алфавитный список учеников класса перечислить в произвольном порядке, то множество учащихся данного класса от этого не изменится.

Основные определения теории множеств

Множество *B* является ***подмножеством*** множества *A,* если каждый элемент множества *B* является также элементом множества *A*, и это обозначается специальным символом:

$$B \subset A.$$

Например, множество целых чисел является подмножеством множества рациональных чисел, множество млекопитающих – подмножеством множества всех живых организмов. Любое множество является подмножеством самого себя.

Отдельно рассматривается *пустое множество* – $\varnothing$**.** Такими являются, например, множество дробных значений, выпавших на грани игральной кости, множество летающих трамваев и т. д. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Существуют различные способы задания множеств:

1) Перечисление элементов, которое производится, как правило, в фигурных скобках, через запятую: A = {3, 7, ♥};

2) По характеристическому свойству: A = {*x* | P(x)}, где P(x) – характеристическое свойство, а *x* – общее обозначение для элемента множества.

3) Обычное словесное описание.

Объединением, или ***суммой, множеств*** *A* и *B* называется множество, которое содержит как элементы множества *A*, так и элементы множества *B*. Оно обозначается следующим образом:

$$\boldsymbol{A \cup B} \text{ или } \boldsymbol{A + B}:$$

$$\mathbf{A\cup B = \{a \mid a\in X \text{ или } a\in Y\}.}$$

Обозначения «∪» и «+» имеют смысл союза «ИЛИ».

Например, объединением множества девушек и множества юношей данного вуза является множество всех его студентов.

Пересечением, *или* ***произведением,*** множеств *A* и *B* называется множество, содержащее те элементы множеств *A,* которые принадлежат также и множеству *B.* Обозначение пересечения:

$$A \cap B \text{ или } A\cdot B:$$

$$\mathbf{A\cap B = \{a \mid a\in X \text{ и } a\in Y\}.}$$

Обозначения «∩» и «·» имеют смысл союза «И».

Например, пересечением множества цветов синего цвета и множества тюльпанов является множество синих тюльпанов.

Для данных операций выполняются *законы идемпотентности*:

$$A \cup A = A,\ A \cap A = A.$$

Свойства операций над множествами:

$AUB = BUA,\ AI\ B = BI\ A$ – *коммутитивность*

$AU(BUC) = (AUB)UC, \quad AI\ (BI\ C) = (AI\ B)I\ C$ - ассоциативность

$AI\ (BUC) = (AI\ B)U(AI\ C)$ - дистрибутивность

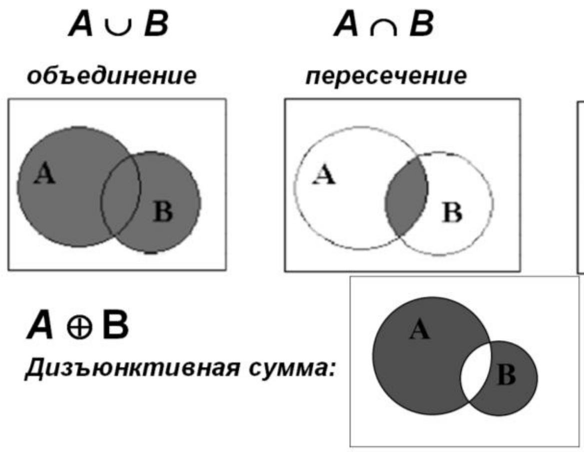
Разность множеств B и A содержит те элементы множества *B*, которые не принадлежат множеству *A.* Обозначается *B**A* или *B* – *A.* Обозначения «\» и «–» имеют смысл «НО НЕ».

Дизъюнктивная сумма **A ⊕ B –** сумма множеств без их пересечения: (A ∪ A) / (A ∩ A).

Если $A \subset B$, то разность множеств *B**A* называется ***дополнением множества*** *A* до множества *B.*

Например, разностью множества *B* – всех участников пробега и множества *A* – участников пробега с четными номерами – является множество участников с нечетными номерами.

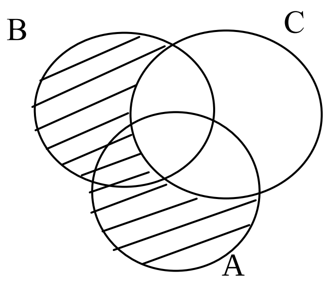
Для визуальной демонстрации операций над множествами удобно использовать ***диаграммы Эйлера-Венна***:



Пример 1. Пусть A = {5, 4, 3, 2, 1}, B = {2, 4, 6, 8, 10}. Найти пересечение, объединение, разность, дизъюнктивную сумму этих множеств. Как соотносятся множества $A\backslash B$ и $B\backslash A$?

Решение.

A ∩ B = {2; 4}, A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10}, A\B = {1, 3, 5}, B\A = {6, 8, 10}. Из последних двух равенств следует, что множества A\B и B\A не пересекаются (не имеют общих элементов).



Пример 2. На рисунке 1.2 изображены три множества. Заштрихуйте множество (A ∪ B)\C.

Решение. Сначала заштрихуем множество A∪B: это оба круга A и B. Затем удалим штриховку в области их пересечения с C

Мощность множества - характеристика множеств (в том числе бесконечных), обобщающая понятие числа элементов конечного множества. Любые два множества, между элементами которых может быть установлено взаимно однозначное соответствие (*биекция*), содержат одинаковое количество элементов (имеют одинаковую мощность).

Обратно: множества, равные по мощности, должны допускать такое взаимно однозначное соответствие.

Декартовым произведением (или прямым произведением) множеств $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ называется множество упорядоченных наборов $(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2 \ldots \mathrm{a}_n)$:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2 \ldots a_n) | a_i \in A_i\},$$

каждый из которых содержит n элементов.

Степенью декартова произведения называется число *n* входящих в него множеств.

Пример. Декартовым произведением множеств девочек Д и мальчиков М танцевальной группы Д = {Света, Настя, Полина, Аня} и М = {Вова, Евгений} является множество следующих пар (имена обозначим начальными буквами): {(С, В), (С, Е), (Н, В), (Н, Е), (П, В), (П, Е), (А, В), (А, Е)}, степень этого декартова произведения равна 2.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение понятия множества.
2. Перечислите способы задания множеств.
3. Можно ли отличать друг от друга элементы множества?
4. Как можно определить, принадлежит ли данный элемент определенному множеству?
5. Что такое подмножество множества? Приведите примеры.
6. Что такое пустое множество?
7. Какие операции можно выполнять над множествами?
8. Как иллюстрировать операции с множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна?
9. Поясните понятие декартова произведения множеств. Приведите примеры.
10. Приведите примеры построения новых множеств при помощи декартова произведения.
11. Что такое мощность множества? Сравнение множеств.

Задания для самоконтроля:

1. Составьте множество двузначных чисел, в записи которых используются лишь цифры 2, 5 и 8. Найдите пересечение этого множества с множеством четных чисел.

2. Дано множество А = {1, 2, 3, {1}, {1, 2}}. Укажите, какие из следующих объектов являются элементами множества А, а какие – подмножествами: 2; {2}; {1, 2}; {1, 3}; {1, {1}}; {{1}}; {1, {2}}, {1,2,{1, 2}}.

3. Даны множества: M = {12, 20, 35}, N = {12, 20, 48, 60, 90}, К = {48, 60, 90}. Найдите:

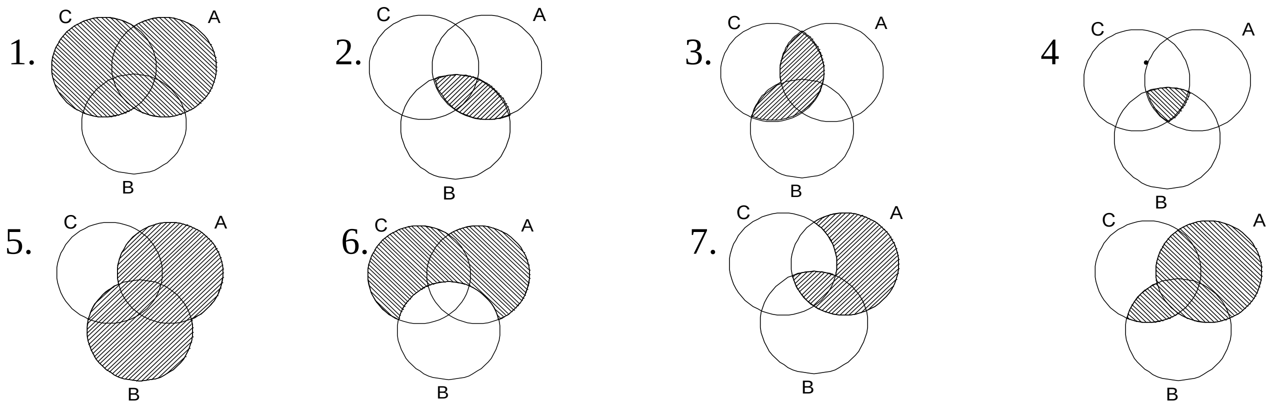
1) M∩N; M∩K; N∩K;
2) M∪K; N∪M; K∪N;
3) N\K; M\N;
4) дополнения Ø до M; К до N.

Решите одну из следующих задач:

4. Найдите:

a) $[8;15]\cap[9;20]$;
b) $(-1;1)\cap[-1;0)$;
c) $[-1;1]\cap[-1;0]$;
d) $(0;2)\cup[0;2]$;
e) $(-1;0]\cap[1;+\infty)$;
f) $[-1;0)\cup[0;4]$;
g) $(0;2)\cap[0;2]$;
h) $[1;+\infty)\cup[0;+\infty)$;
i) $\{4\}\cup(-\infty;4)$.

5. Решите одну из следующих задач:
Запишите с помощью аналитических выражений заштрихованные



участки множеств A, B, C, изображенные на рисунке:

6. Для каждого из слов «сосна», «осколок», «насос», «колос» составьте множество его букв. Имеются ли среди них равные? Равномощные?

7. Доказать с помощью диаграмм Эйлера-Венна, что $(A \cap B)\setminus A = \varnothing$.

8. *Множества A и B определены следующим образом: $A = \{(x, y) : y \geq x^2\}$, $B = \{(x, y) : y \leq x\}$, изобразите графически:
- объединение множеств A и B;
- пересечение множеств A и B;
- разность множеств A и B.

9. Пусть множество A содержит n элементов, а его подмножество B содержит k элементов. Сколько существует множеств C, для которых $B \subset C \subset A$?

10. *Существуют ли множества A, B и C, такие, что $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$ и $(A\cap B)\setminus C = \varnothing$?

11. Найти все декартовы произведения множеств $A = \{4, 6, 8\}$ и $B = \{f, g\}$.

12. В одну из групп, занимающихся бальными танцами, входит 4 девочки: Аня, Оля, Полина и Юлия, 3 мальчика – Сергей, Никита, Кирилл, с которыми занимаются 2 тренера: Инна Федоровна и Эльвира Николаевна. Найдите декартово произведение этих трех множеств, определите его мощность и

тем самым количество возможных вариантов составления групп из пар и занимающихся с ними тренеров.

Решите одну из следующих задач:

13.Студенты решали две задачи. Имеются четыре списка: I – решившие первую задачу, II – решившие только одну задачу, III – решившие, по крайней мере, одну задачу, IV – решившие обе задачи. Какой из списков самый длинный? Могут ли два списка совпадать по составу? Если да, то какие?

14. Лучший математик среди шахматистов и лучший шахматист среди математиков – это один и тот же человек или (возможно) разные?

15. Есть 10 гирудотерапевтов и 12 фармацевтов, а всего – 18 человек. Сколько медиков занимается обоими видами деятельности?

16. Каждый десятый отличник в школе имеет олимпиадные награды по физике, а каждый пятый школьник, получивший награды по этой дисциплине, – отличник. Кого больше – отличников или награжденных «физиков» – и во сколько раз?

17. В течение скольких дней в июне была хорошая погода, если 10 дней шел дождь, в течение 5 дней наблюдались низкие температуры, в общей сложности в течение 9 дней дул сильный ветер, 4 дня были и дождливые и ветреные, 2 – дождливые и холодные, а в течение одного дня наблюдались все три ухудшающих погоду фактора?

18. На кафедре психологии каждый из работников знает хотя бы один иностранный язык: 5 человек – английский, 7 человек – немецкий, 3 человека – оба языка. Сколько человек работает на кафедре? Сколько из них знают только немецкий или только английский язык? Сколько человек знают один язык?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №11

ТЕМА: Алгебра логики.

Утверждения, не требующие доказательства, называются ***аксиомами. Основными*** называются элементарные понятия, которые нельзя определить через другие.

Высказывание – предложение (утверждение), которое может быть однозначно трактовано как *истинное* или *ложное*, это обозначается соответственно буквами «*И*» и «*Л*». В дальнейшем могут быть проведены параллели между «*И*» и «*Л*» и «1» и «0».

Формализация – важный шаг на пути построения любой стройной научной теории. Необходимо проделать следующие шаги: ввести *символы* для записи научных утверждений, изобразить графически эти выкладки в виде *формул*, в том числе аксиом теории, описать используемые правила логики. Результатом должна стать ***формализованная аксиоматическая теория.***

Алгебра высказываний

Алгебра высказываний, или *булева алгебра,* рассматривает способы вычисления логического значения сложного высказывания по логическим значениям составляющих его простых высказываний с помощью *логических операций*, образования одних высказываний из других, более простых. Простые высказывания рассматриваются только с точки зрения их истинности или ложности (*И* или *Л*), таким образом, давая результат вычисления сложных высказываний – И или Л .

Традиционно высказывания обозначаются заглавными буквами начала латинского алфавита – ***A, B, C***… Высказывание, которое нельзя представить в виде суперпозиции более мелких частей, называется *простым*. Высказывание, в которое входят несколько более простых, связанных посредством логических операций, называется *сложным.* Различают следующие логические операции:

№:	Операция	Название операции	Краткое прочтение	Полное прочтение
1	$\neg A$ (или $\bar{A}$)	***Отрицание***	не *A*	Неверно, что *A*
2	$A \cdot B$, $A \wedge B$, $A\&B$	***Конъюнкция***	*A* и *B*	Верно, что *A*, и верно, что *B*
3	$A \vee B$	***Дизъюнкция***	*A* или *B*	Верно, что *A*, или верно, что *B,* или верны оба высказывания
3а	$A \oplus B$	***Исключающая дизъюнкция***	либо *A*, либо *B*	Верно что-то одно: или *A*, или *B*

4	$A \leftrightarrow B$ *(или* $A \equiv$ B*)*	***Эквивалентность (эквиваленция)***	*A* эквивалентно *B*	Верно, что *A*, тогда и только тогда, когда верно, что *B*
5	$A \rightarrow B$	***Импликация***	Если *A*, то *B*. *A* влечёт *B*	Если верно, что *A*, то верно, что *B*

Пример. Записать сложное высказывание «Если ожидаются осадки, то я либо возьму зонт, либо надену пальто» в формализованном виде, обозначая высказывания латинскими буквами.

Решение. Обозначим за А высказывание «ожидаются осадки», за B – «возьму зонт», за C – «надену пальто». Тогда наше высказывание запишется следующим образом: $A \rightarrow (B \vee C)$.

Логические операции носят чисто формальный характер, и далеко не всегда стоит искать здравый смысл в толковании сложного высказывания.

Порядок выполнения логических операций определяется согласно их **приоритетам**: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция. Этот порядок может изменяться с помощь скобок (как в арифметике).

Следующая таблица определяет, какие значения принимают высказывания, полученные с помощью «базовых» логических операций, в зависимости от значений составляющих их «простых» высказываний *A* и *B)*. Такая таблица называется ***таблицей истинности***:

A	***B***	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$
И	*И*	*Л*	*И*	*И*	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*	*Л*	*И*	*Л*	*Л*
Л	*И*	*И*	*Л*	*И*	*Л*	*И*
Л	*Л*	*И*	*Л*	*Л*	*И*	*И*

Сложные формулы могут представлять собой суперпозицию нескольких логических операций.

Пример 2. Составьте таблицу истинности для сложного высказывания $(\neg X \wedge \neg Y) \vee X$.

Решение:

X	Y	$\neg$X	$\neg$Y	$\neg X \wedge \neg Y$	$(\neg X \wedge \neg Y) \vee X$
и	и	л	л	л	и
и	л	л	и	л	и
л	и	и	л	л	л
л	л	и	и	и	и

Пример 3. Проверьте с помощью таблиц истинности закон двойного отрицания.

Решение. Закон «двойного отрицания» формально можно записать: ¬¬X↔X. Таблица истинности для данной функции будет выглядеть следующим образом:

X	¬X	¬¬X	¬¬X↔X
и	л	и	и
л	и	л	и

Итак, закон двойного отрицания выполняется при всех значениях переменной X.

Таблицы истинности можно использовать для решения логических задач.

Задача «Кто виноват?»

По обвинению в ограблении перед судом предстали Иванов, Петров, Сидоров. Следствием установлено:

1. если Иванов не виновен или Петров виновен, то Сидоров виновен;
2. если Иванов не виновен, то Сидоров не виновен.

Виновен ли Иванов?

Решение. Выделим простые высказывания:

A = «Иванов виновен»;

B = «Петров виновен»;

C = «Сидоров виновен».

Запишем на языке алгебры логики факты, установленные следствием: $(\overline{A} \vee B) \rightarrow C$, $\overline{A} \rightarrow \overline{C}$.

Обозначим

$F = ((\overline{A} \vee B) \Rightarrow C) \,\&\, (\overline{A} \Rightarrow \overline{C})$ - единое логическое выражение для всех требований задачи. Оно должно быть истинно. Составим для него таблицу истинности:

A	B	C	$F = ((\overline{A} \vee B) \Rightarrow C) \,\&\, (\overline{A} \Rightarrow \overline{C})$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Решить данную задачу — значит указать, при каких значениях *A* полученное сложное высказывание *F* истинно. Для этого необходимо проанализировать все строки таблицы истинности, где *F = 1*. И если хотя бы в одном из таких случаев *A = 0* (Иванов не виновен), то у следствия недостаточно фактов для того, чтобы обвинить Иванова в преступлении.

Анализ таблицы показывает, что высказывание F истинно только в тех случаях, когда A истинно, т. е. Иванов в ограблении виновен.

Для работы с высказываниями полезно использовать следующие ***законы***:

Закон двойного отрицания: $\neg\neg A \leftrightarrow A$
Переместительный: $A \lor B = B \lor A$ (коммуникативность)
Сочетательный: $A \land (B \land C) \leftrightarrow (A \land B) \land C$, $A \lor (B \lor C) \leftrightarrow (A \lor B) \lor C$ (ассоциативность)
Распределительный: $A \land (B \lor C) \leftrightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$, $A \lor (B \land C) \leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$ (дистрибутивность)
Поглощения: $A \lor (A \land B) \leftrightarrow A$, $A \land (A \lor B) \leftrightarrow A$
Склеивания: $(A \lor B) \land (\neg A \lor B) \leftrightarrow B$, $(A \land B) \lor (\neg A \land B) \leftrightarrow B$
Законы Де Моргана: $\neg(A \lor B) \leftrightarrow (\neg A \land \neg B)$, $\neg(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg B)$
Идемпотенции: $A \lor A \leftrightarrow A$, $A \land A \leftrightarrow A$
Операции с инверсией: $A \lor \neg A \leftrightarrow$ И(1), $A \land \neg A \leftrightarrow$ Л(0)
Операции с константой: $A \lor$ Л(0) $\leftrightarrow A$, $A \land$ Л(0) $\leftrightarrow$ Л(0), $A \lor$ И(1) $\leftrightarrow$ И(1), $A \land$ И(1) $\leftrightarrow A$

Замена операций:

Замена эквиваленции – $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$
Замена импликации – $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \lor B)$

Упрощение логических формул

Некоторые преобразования логических формул похожи на преобразования формул в обычной алгебре (вынесение общего множителя за скобки, использование переместительного и сочетательного законов и т. п.), а некоторые логические выражения упрощаются только с использованием вышеперечисленных специфических законов алгебры логики.

Приведем примеры таких преобразований:

1. Упростить выражение: $\neg(x \lor y) \land (x \land \neg y)$.

Применим последовательно:

правило де Моргана: $\neg(x \lor y) \land (x \land \neg y) = \neg x \land \neg y \land (x \land \neg y)$,

уберем лишние скобки: $\neg x \land \neg y \land (x \land \neg y) = \neg x \land \neg y \land x \land \neg y$,

Переместительный закон: $\neg x \land \neg y \land x \land \neg y = \neg x \land x \land \neg y \land \neg y$,

правило операций с переменной её инверсией: $\neg x \land x \land \neg y \land \neg y = 0 \land \neg y \land \neg y$,

Идемпотенции: $0 \land \neg y \land \neg y = 0 \land \neg y$,

правило операций с константами: $0 \land \neg y = 0$.

2. Упростить выражение: $a \lor \neg(b \land \neg c) \lor \neg(\neg a \lor b \lor \neg c)$.

Применим правило де Моргана: $a \lor \neg(b \land \neg c) \lor \neg(\neg a \lor b \lor \neg c) = a \lor \neg b \lor \neg\neg c \lor \neg\neg a \land \neg b \land \neg\neg c$, далее применение закона Двойного отрицания дает: $a\vee\neg b\vee\neg\neg c\vee\neg\neg a\wedge\neg b\wedge\neg\neg c = a\vee\neg b\vee c\vee a\wedge\neg b\wedge c$,

затем применим законы Переместительный и Поглощения: $a\vee c\vee(\neg b\vee a\wedge\neg b\wedge c) = a\vee c\vee\neg b$.

Решение логических задач аналитическим методом

Известному немецкому математику и логику Эрнесту Шредеру принадлежит идея обозначения в качестве знака для ложного суждения **0**, а для истины – **1**. Тогда таблица истинности приобретает вполне арифметический вид:

A	B	¬A	A∧B	A∨B	A→B	A↔B
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Обратите внимание, что, оценивая суждения таким образом, мы находимся в двоичной системе счисления. Имея дело с цифрами, естественно предположить, что и логические действия можно заменить арифметическими:

¬	*Отрицание*	1 – A
∧	*Конъюнкция*	A × B или AB
∨	*Дизъюнкция*	A + B – A × B или A + B – AB
→	*Импликация*	1 – A + A × B или 1 – A + AB
↔	*Эквивалентность*	1 – (A – B) × (A – B) или 1–(A–B)(A–B)

! ***Перейдя к арифметическим моделям логических функций, можем действовать по законам арифметики***.

Пример 4. Решить задачу средствами алгебры логики.

В олимпиаде по математике 4 участника: Антон, Миша, Семен и Стас. Болельщики строят прогнозы:

1) Семен займет I место, Миша – II;
2) Семен займет II место, Стас – III;
3) Антон займет II место, Стас – IV.

По окончании соревнований оказалось, что в каждом предположении только одно из высказываний каждого болельщика истинно, другое – ложно. Каковы результаты олимпиады?

Решение. В данной задаче примем следующие обозначения:
(A) – «Семен займет I место»; (B) – «Миша займет II место»;
(C) – «Семен займет II место»; (D) – «Стас займет III место»;
(E) – «Антон займет II место»; (F) – «Стас займет IV место».
Из того, что одно из высказываний каждого болельщика истинно, следует, что:

$A \vee B \leftrightarrow$ Истина, $C \vee D \leftrightarrow$ Истина, $E \vee F \leftrightarrow$ Истина, или в арифметической форме:

$A + B - AB = 1$, $C + D - CD = 1$, $E + F - EF = 1$. (1)

Из того, что одно из высказываний каждого болельщика ложно, следует, что:

$A \wedge B \leftrightarrow$ Ложь, $C \wedge D \leftrightarrow$ Ложь, $E \wedge F \leftrightarrow$ Ложь,

или в арифметической форме:

$AB = 0$, $CD = 0$, $EF = 0$. (2)

Используя (2), можно упростить (1):

$A + B = 1$, $C + D = 1$, $E + F = 1$. (3)

Из того, что каждое место займет один человек, следует, что:

$B \wedge C \leftrightarrow$ Ложь, $C \wedge E \leftrightarrow$ Ложь, $B \wedge E \leftrightarrow$Ложь, $A \wedge C \leftrightarrow$Ложь, $D \wedge F \leftrightarrow$ Ложь,

или в арифметической форме:

$BC = 0$, $CE = 0$, $BE = 0$, $AC = 0$, $DF = 0$. (4)

Перейдя к арифметическим моделям логических функций и действуя *по законам арифметики*, мы получим:

$A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1$, $E = 1$, $F = 0$.

Это означает, что: Семен займет I место; Антон займет II место; Стас займет III место; Мише остается IV место.

Контрольные вопросы:

1. Что изучает математическая логика?
2. Какие предложения не могут являться высказываниями?
3. Что называется исходной посылкой, постулатом, аксиомой, гипотезой?
4. Что требуется для формализации математических теорий?
5. Что рассматривает алгебра высказываний?
6. Перечислите все известные Вам логические операции.
7. Что такое таблица истинности? Правила заполнения таблицы истинности.
8. Опишите правила построения логической функции по таблице истинности.
9. Основные законы логики. Формальное представление законов логики с помощью логических операций.
10. В чем состоит важность перехода к арифметическим моделям логических функций?

Задания для самоконтроля:

Решите одну из следующих задач:

I. Запишите данные высказывания в формализованном виде, обозначая их латинскими буквами:

1. Если я куплю яблоки или абрикосы, то приготовлю фруктовый пирог.

2. Игорь получит место переводчика тогда и только тогда, когда выучит английский или японский язык.

3. Если данный четырёхугольник квадрат, то около него можно описать окружность.

4. Петров или врач, или шахматист, или и врач, и шахматист одновременно.

II. Составьте таблицу истинности для следующих функций:

Решите одну из следующих задач:

1) $(\neg A \to B) \vee (A \wedge B)$;
2) $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B)$;
3) $(\neg X \vee \neg Y)$;
4) $\neg (\neg X \to \neg Y) \vee X$;
5) $\neg (\neg X \vee \neg Y)$;
6) $(\neg X \wedge \neg Y) \vee X$;
7) $(\neg X \wedge Y) \leftrightarrow \neg Y$;
8) $(X \vee \neg X) \wedge (X \vee \neg Y)$;
9) $(\neg Y \vee \neg X) \wedge (\neg Y \vee \neg Y)$;
10) $(X \wedge \neg Y) \wedge (\neg Y \to \neg X)$.

III. Проверьте с помощью таблиц истинности законы:

Решите одну из следующих задач:

1) $A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ – ассоциативности конъюнкции;
2) $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ – дистрибутивности конъюнкции;
3) $A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ – ассоциативности дизъюнкции;
4) $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ – дистрибутивности дизъюнкции;
5) контрапозиции: $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$;
6) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$ – замена эквиваленции ;
7) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ – замена импликации;
8) $(A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$– замена дизъюнкции;
9) $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \to (A \leftrightarrow C)$ – транзитивность эквивалентности;
10) $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$ – правило силлогизма;
11) правило «эквивалентной замены» (формулировку найти самостоятельно);
12) правило «отделения» (формулировку найти самостоятельно);
13) законы де Моргана (формулировку найти самостоятельно).

IV. Существует ряд общеизвестных логических задач, традиционно включаемых в курсы дискретной математики. Решите одну из следующих задач:

1. В симфонический оркестр приняли на работу трёх музыкантов: Брауна, Смита и Вессона, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое и трубе. Известно, что:

Смит самый высокий;

играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте;

играющие на скрипке и флейте и Браун любят пиццу;

когда между альтистом и трубачом возникает ссора, Смит мирит их;

Браун не умеет играть ни на трубе, ни на гобое.

На каких инструментах играет каждый из музыкантов, если каждый владеет двумя инструментами?

2. Три дочери писательницы Дорис Кей – Джуди, Айрис и Линда – тоже очень талантливы. Они приобрели известность в разных видах искусств – пении, балете и кино. Все они живут в разных городах, поэтому Дорис часто звонит им в Париж, Рим и Чикаго.

Известно, что:

Джуди живет не в Париже, а Линда – не в Риме;

парижанка не снимается в кино;

та, которая живет в Риме, – певица;

Линда равнодушна к балету.

Где живет Айрис и какова ее профессия?

3. В поездке пятеро друзей – Антон, Борис, Вадим, Дима и Гриша – знакомились с попутчицей. Они предложили ей отгадать их фамилии, причём каждый из них высказал одно истинное и одно ложное утверждение:

Дима сказал: «Моя фамилия – Мишин, а фамилия Бориса – Хохлов». Антон сказал: «Мишин — это моя фамилия, а фамилия Вадима – Белкин». Борис сказал: «Фамилия Вадима – Тихонов, а моя фамилия – Мишин». Вадим сказал: «Моя фамилия – Белкин, а фамилия Гриши – Чехов». Гриша сказал: «Да, моя фамилия Чехов, а фамилия Антона – Тихонов».

Какую фамилию носит каждый из друзей?

4. По телевизору **с**иноптик объявляет прогноз погоды на завтра и утверждает следующее:
1.Если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя.
2.Если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра.
3.Если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра.
Так какая же погода будет завтра?

5. Есть 5 домов, каждый разного цвета. В каждом доме живет один человек, отличающийся от других по национальности: немец, англичанин, швед, датчанин, норвежец. Каждый пьет только один определенный напиток, курит определенную марку сигарет и держит определенное животное. Никто из 5 человек не пьет одинаковые с другими напитки, не курит одинаковые сигареты и не держит одинаковое животное.

Вопрос: кому принадлежит рыба?

Подсказки:

- Англичанин живет в красном доме.
- Швед держит собаку.
- Датчанин пьет чай.
- Зеленый дом стоит слева от белого.
- Жилец зеленого дома пьет кофе.
- Человек, который курит Pall Mall, держит птицу.
- Жилец из среднего дома пьет молоко.
- Жилец из желтого дома курит Dunhill.
- Норвежец живет в первом доме.
- Курильщик Marlboro живет около того, кто держит кошку.
- Человек, который держит лошадь, живет около того, кто курит Dunhill.
- Курильщик сигарет Winfield пьет пиво.
- Норвежец живет около голубого дома.
- Немец курит Rothmans.
- Курильщик Marlboro живет по соседству с человеком, который пьет воду.

По легенде эта головоломка была создана Альбертом Эйнштейном в годы его детства. Также бытует мнение, что она использовалась Эйнштейном для проверки кандидатов в ассистенты на способность к логическому мышлению.

Существует гипотеза, что Эйнштейн утверждает, что лишь два процента населения земного шара способны оперировать в уме закономерностями, связанными сразу с пятью признаками. Как частное следствие этого, приведённая головоломка может быть решена **без использования бумаги** лишь теми, кто принадлежит к этим двум процентам. Тем не менее, не существует никаких документальных свидетельств того, что Эйнштейн когда-либо утверждал подобное.

В своей самой сложной редакции задача ***предполагает решение в уме, без использования каких-либо записей или средств сохранения информации***. Без этих ограничений головоломка заметно теряет в сложности, поскольку может быть решена простым составлением таблицы с исключением заведомо противоречивых вариантов и, следовательно, мало что говорит о способностях испытуемого.

V. Пользуясь логическими законами и правилами, упростите логическую формулу:

Решите одну из следующих задач:

1) $(X \wedge \neg Y \vee Z) \wedge ((\neg X \rightarrow Y) \vee Z)$;
2) $\neg X \wedge Y \vee \neg(X \leftrightarrow Y) \vee X$;
3) $(Y \vee X) \wedge (\neg X \rightarrow Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y)$;
4) $A \wedge \neg B \vee \neg A \wedge C \rightarrow B \vee A \wedge C$;

5) $A \wedge \neg B \vee A \wedge C \wedge B$;

6) $A \wedge \neg B \wedge C \vee A \wedge \neg(B \rightarrow C)$;

7) $\neg(X \wedge Y \vee \neg Z)$;

8) $(X \wedge Y) \leftrightarrow (X \wedge Z) \wedge Y \vee X \wedge Z$;

9) $X \vee \neg(Y \wedge \neg Z) \vee \neg(\neg X \vee Y \vee \neg Z)$

ЛИТЕРАТУРА:

Обязательная:

1. Кричевец, А. Н. Математика для психологов : учебник / А. Н. Кричевец, Е. В. Шикин, А. Г. Дьячков. - 4-е изд. - М. : Флинта, 2010. - 376 с.
2. Ганичева А.В., Козлов В.П. Математика для психологов. М.: Аспект-пресс, 2005, с.81-89.

Дополнительная:

1. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Гуманитариям о математике. Математика: Пути знакомства. Основные понятия. Методы. Модели. - М.: Издательская группа URSS, 2001.