



Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Краснодарский государственный медицинский
университет имени профессора В. Ф. Войно-Ясенецкого»
Министерства здравоохранения Российской Федерации

Фармацевтический колледж



Математика

Учебное пособие по геометрии для обучающихся
на базе основного общего образования

Красноярск
2022

УДК 51(075.32)
ББК 22.1
М34

Составитель: И. П. Клобертанц

М34 **Математика** : учебное пособие по геометрии для обучающихся на базе основного общего образования / сост. И. П. Клобертанц ; Фармацевтический колледж. – Красноярск : тип. КрасГМУ, 2022. - 94 с.

Учебное пособие по дисциплине «Математика» раздел «Геометрия» предназначено для аудиторной работы обучающихся, соответствует требованиям рабочей программы дисциплины ФГОС СОО (2022 год), адаптирована к образовательным технологиям с учетом специфики обучения.

Рекомендован к изданию по решению методического совета фармацевтического колледжа (Протокол № 2 от 25 октября 2022 г.)

УДК 51(075.32)
ББК 22.1

© ФГБОУ ВО КрасГМУ
им. проф. В.Ф.Войно-Ясенецкого
Минздрава России, Фармацев-
тический колледж, 2022
© Клобертанц И. П., составление,
2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
История развития математики	6
Аксиоматика	12
Параллельность в пространстве.....	17
Перпендикулярность в пространстве	21
Углы между прямыми и плоскостями в пространстве.....	27
РАЗДЕЛ МНОГОГРАННИКИ.....	32
Призма. Параллелепипед. Куб	32
Пирамида. Тетраэдр	38
Сечение многогранников.....	43
РАЗДЕЛ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ.....	49
Задачи по теме «Многогранники» и «Тела вращения».....	64
Объемы геометрических тел	69
Площади поверхностей.....	73
Координаты пространства.....	78
Векторы в пространстве	84
Зачетное занятие.....	88
Список литературы	94

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие является задачником-практикумом по дисциплине Математика разделу геометрия для обучающихся на базе основного общего образования.

Пособие предназначено помочь обучающимся в освоении курса геометрии по основным разделам программы, выработать необходимые умения для применения изученного материала к решению различных задач и приобрести необходимые для этого навыки.

Каждая тема начинается кратким изложением соответствующих теоретических аспектов и математических формул. Разобранные примеры позволяют студенту самостоятельно подготовиться к занятию.

Нужна ли математика медицинскому работнику? Леонардо да Винчи говорил: *«Никакой достоверности нет в науках там, где нельзя приложить ни одной из математических наук, и в том, что не имеет связи с математикой»*.

Математика представляет по своей природе всеобщее и абстрактное знание, она в принципе может и должна использоваться во всех отраслях науки. Математику можно отнести к всеобщим наукам. В самом деле, она считается всеобщей и абстрактной наукой, поскольку математический аппарат в принципе может использоваться и практически используется во всех без исключения областях знания. *Задача* математики состоит в описании того или иного процесса с помощью какого-либо математического аппарата, то есть формально-логическим способом. Говоря о предмете и функциях математики, очевидно, что в современной науке все более ощутимой становится интегрирующая роль математики, поскольку она является всеобщей научной дисциплиной. Функции математики в равной мере являются функциями гуманитарными, поскольку направлены на совершенствование материальной и духовной сфер человеческого бытия.

При изучении математики осуществляется развитие интеллекта обучающегося, обогащение его методами отбора и анализа информации. Преподавание любого раздела математики благотворно сказывается на умственном развитии, поскольку прививает им навыки ясного логического мышления, оперирующего четко определенными понятиями.

Математика содержит в себе черты волевой деятельности, умозрительного рассуждения и стремления к эстетическому совершенству. Ее основные и взаимно противоположные элементы - логика и интуиция, анализ и конструкция, общность и конкретность.

Изучение математики также способствует формированию гражданских качеств личности посредством воспитания свойства, которое мы называем интеллектуальной честностью, благотворно сказывается на умственном, нравственном и эстетическом развитии обучающихся.

Одновременно воспитываются волевые качества личности, без которых невозможно овладение научной теорией, формируются навыки самостоятельной исследовательской работы, наконец, воспитывается

интеллектуальная честность, которая не позволяет оперировать сомнительными, не доказанными со всей необходимой строгостью фактами. Причем это относится не только к решению математических задач, но и к другим областям человеческой деятельности, в том числе и к анализу явлений общественно-политической жизни. Математическое образование из внешнего по отношению к студенту процесса обучения трансформируется в собственно познавательный процесс. Только совместные действия этих полярных начал, и борьба за их синтез обеспечивают жизненность, полезность и высокую ценность математической науки.

Учитывая внутреннее логическое единство математики, органическую взаимосвязь ее частей, важнейшим требованием к организации ее преподавания должны стать последовательность и преемственность в обучении, видение на всех его этапах основной цели. Этой целью является накопление специальных знаний, овладение приемами постановки и решения математических задач и на их базе развитие интеллекта учащихся, формирование у них культуры мышления, воспитание волевых качеств личности, умения преодолевать трудности, эстетическое развитие, базирующееся на способности оценить красоту научных построений и радости от обретения нового знания.

Таким образом, математика своими специфическими средствами способствует решению целого комплекса гуманитарных задач и имеет большое значение в жизни общества.

Нет сомнений, что математика и математический стиль мышления совершают сейчас триумфальный марш, как в науке, так и в ее применениях. Студенты должны в какой-то мере почувствовать это и относиться к математике с большим интересом, увлечением и пониманием необходимости математических знаний, как для будущей их деятельности, так и для жизни человеческого общества.

История развития математики

Значение темы:

Математика всегда была неотъемлемой и существеннейшей составной частью человеческой культуры, она является ключом к познанию окружающего мира, базой научно-технического прогресса и важной компонентой развития личности.

знать:

- определение математики
- основные периоды развития математики;
- выдающихся математиков различных исторических периодов, их биографии и основные труды;

уметь:

- критически воспринимать, анализировать и оценивать историческую информацию, факторы и механизмы исторических изменений.

Краткое содержание темы

Определение математики

Что такое «Математика»? Чтобы ответить на этот вопрос нужно знать, что такое «Математика». В научной и методической литературе предложено много различных определений математики.

Знаменитая статья выдающегося советского академика А.Н. Колмогорова (1903-1987) «Математика» (1954 г.) начинается с такого определения математики: *«Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть – весьма реальный материал»*. Вместе с тем он подчеркивает, что запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, непрерывно расширяется в связи с запросами естествознания, так что это определение наполняется все более богатым содержанием.

Название «математика» происходит от греческого слова «матейн» (mathein) - учиться, познавать. Древние греки вообще считали, что понятия «математика» (mathematike) и «наука», «познание» (mathema) - синонимы. Им было свойственно такое понимание универсализма этой отрасли знания, которое два тысячелетия спустя выразил Рене Декарт, писавший: *«К области математики относят науки, в которых рассматриваются либо порядок, либо мера, и совершенно не существенно, будут ли это числа, фигуры, звезды, звуки или что-нибудь другое...; таким образом, должна существовать некая общая наука, объясняющая все, относящееся к порядку и мере, не входя в исследование никаких частных предметов...»*

Другое объяснение происхождения слова «математика» связано с греческим словом «матема» (mathema), что означает урожай, сбор урожая. Разметка земельных участков (геометрия), определение сроков полевых работ (на основе астрономических наблюдений и вычислений), подготовка

необходимого количества посевных материалов и подсчет собранного урожая требовали серьезных математических знаний.

Как правило, люди думают, что математика – это всего лишь арифметика, то есть изучение чисел и действий над ними. На самом деле математика – это намного больше. Это – язык и способ описания мира.

Великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс, которого называли «королем математики» сказал: «*Математика – царица наук, арифметика – царица математики*».

Арифметика – это раздел математики, изучающий числа и действия над ними. Любой нормальный ребенок может преуспевать в арифметике.

Умение считать – это еще не все. Еще необходимо уметь выражать свои мысли, понимать задачи и устанавливать связи между фактами, которые хранятся в памяти. Числа – это только часть особого математического языка. А лучший способ выучить любой язык – это применять его.

История развития математики

В истории математики принято различать следующие четыре периода:

Период 1. Период накопления первоначальных математических сведений (до VI в. до н.э.)

Период накопления начальных математических сведений заканчивается в Древней Греции VI в. до н.э. он включает в себя происхождение первых натуральных чисел и первых геометрических фигур и тел, математику Древнего Египта, в пирамидах. Важнейшим из дошедших до нас текстов является папирус Райнда содержащий 84 задачи. Носителями научных знаний в Древнем Египте были «писцы» — чиновники, состоящие на государственной или храмовой службе. Положение писца в Древнем Египте было привилегированным. Работа в письме не облагалась налогами. Математические знания древнего писца позволяли ему производить расчеты при строительных работах, сборе налогов, разделе имущества обмене и распределении продуктов, измерении площадей полей, объем плотин, зернохранилищ и т.п. Все задачи сводятся к вычислениям с конкретными количествами, числа как таковые, и методы решения не становятся еще предметом рассмотрения. Задачи группируются по темам (задачи на емкость, задачи на площадь и т.д.). Каждая задача решается заново, без каких-либо пояснений в числах, лишь иногда дается проверка найденного решения. Математика первого периода в Древнем Египте еще не разделяется на арифметику и геометрию, а представляет собрание примеров решения простейших прикладных задач.

Период 2. Период математики постоянных величин (VI в. до н.э.- XVI в. н.э.). Этот период следует рассматривать, как развитие математики Древней Греции, Римской Империи, математику средневекового Китая, средневековой Индии, стран ислама, средневековой Европы и математики эпохи возрождения.

Первые математические теории были доказаны учеными: ионийской школы натурфилософии в первой половине VI в. до н.э.

Основателем школы считался Фалес - купец политический деятель, философ, астроном и математик, живший в Милете - богатой греческой колонии Малой Азии.

Но коренное преобразование математики начинается с Пифагора (VI в. до н.э.). В V в. до н.э. Прокл напишет: *«Пифагор преобразовал математику, рассматривал принципы чисто абстрактным образом и исследовал теоремы не с материальной, не с интеллектуальной точки зрения»*.

В школе Пифагора разрабатывается арифметика целых чисел, выстраивается первая теория отношений, имеет место открытие несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, представляется теория делимости основывается геометрическая алгебра, в которой задачи решаются построением с помощью циркуля и линейки. Все это относится к VI-V в. до н. э. Развивая математику пифагорейцев, греки в IV-III в. до н.э. выстраивают теорию канонических сечений (Менехм, Апполоний); создают новую теорию отношений (Евдокс); первый метод пределов (Евдокс); первые интегральные и дифференциальные методы (Архимед). Достижения греческих математиков были приведены в систему в «Началах» Евклида (III в. до н.э.). Со II в. до н.э. начинается спад греческой математики, вызванный началом тяжелых разрушительных войн, приведших к созданию Римской империи и только в начале нашей эры греческая математика вновь начинает оживать. Уже в I в. н.э. в Александрии работают такие математики как Герон и Менелай, в середине II в. н.э. – Птоломей, в III в. н. э. создает свою алгебру Диофант.

Исторические документы свидетельствуют, что в Китае математике уделялось большое внимание издавна, уже во II-й половине в. до н.э. были поставлены математическое образование и экзамены. В VII-X вв. в Императорской гимназии математика изучалась семь лет. Для занятия места чиновника в Китае требовалось сдать экзамены по математике кроме прочих. В течение многих веков переиздавались «Десять классических трактатов», содержащих основы китайской математики. Однако китайской математике был свойственен догматизм, проявляющийся в неизменности математических произведений – «классических трактатов» со II в до н.э. по IV в н.э. в, то время как греческие математические работы при переписке подвергались значительной обработке, дополнялись, комментировались. Исследования показывают, что математика Древнего и Среднего Китая вплоть до XIV в. развивалась преимущественно как совокупность вычислительных алгоритмов. Наиболее значительные из этих алгоритмов — метод «ФАН-ЧЕН» решение системы линейных уравнений и метод «ТЯНЬ-ЮАНЬ» приближенного решения алгебраических уравнений. Достижение Китайской математики — введение отрицательных чисел.

Необходимо отметить особое место и математики средневековой Индии. Первые индийские математические тексты относятся к VII-V в до н.э. Можно назвать крупнейших индийских математиков V-VII вв. н.э. — Ариабхата (V-VI в н.э.), Брахмапутра (VII в. н.э.), Магавира (IX в н.э.), Шридхара (IX-X вв. н.э.), Бхаскара (XII в н.э.) Уже с первых веков н.э.

прослеживается связь математики Индии с математикой Китая. Особенно усилившаяся в период распространения Буддизма и в это же время индийская математика распространяется на территории стран ислама. Важнейшим достижением индийской математики является: создание арифметики на основе десятичной позиционной системы счисления, разработка тригонометрии, создание алгебраической символики. В VII в. н.э. сторонники ислама, Халифы, подчинили себе Сирию, Междуречье, Иран, Египет, Среднюю Азию, Северную Африку, а позднее — Испанию, Сицилию и юг Италии, часть Закавказья и часть Индии. Образование исламского халифата совпало со становлением феодального строя. В этот период образовались научные центры: Багдад — столица халифата, Бухара Хорезм, Каир, Кордова, Исфахан, Марага и многие другие. В IX-X вв. н.э. работают такие известные математики как Ал-Хорезми, Ал-Беруни, Абу Камил, Ал-Мисри, Хасан ибн Ал-Хасан. А в XI в. н.э. - Омар Хаям, а в XIII в. н.э. - Насир ад-Дин ат-Туси, в XV в. — Ал-Каши и т.д. Из достижений арабских математиков отметим работы по теории параллельных, алгебре и тригонометрии. Немаловажно было то, что арабские математики переписывали труды греческих математиков, комментировали их и совершенствовали их, переняли у индийской математики их десятичную позиционную систему счисления и все это послужило основой для последующего развития математики в Европе.

Период 3. Период математики переменных величин (XVII-XX вв.).

Характеризуется созданием и развитием математического анализа, изучением процессов в их движении, развитии. Новые формы организации науки. Развитие вычислительных средств - открытие логарифмов. Жизнь и творчество Р. Декарта. Рождение аналитической геометрии. Теоретико-числовые проблемы в творчестве Ферма. Создание основ проективной геометрии в работах Ж. Дезарга и Б. Паскаля. Переписка Ферма и Паскаля и первые теоретико-вероятностные представления. Появление статистических исследований.

Развитие интеграционных и дифференциальных методов в XVII в. (И. Кеплер, Б. Кавальери, Б. Паскаль). Открытие Ньютоном и Лейбницем дифференциального и интегрального исчисления. Первые шаги математического анализа (Я. Бернулли и др.).

Период 4. Период современной математики (XIX - XX вв.)

Период создания математики переменных отношений (XIX - XX вв.) характеризуется созданием и развитием математического анализа, изучением процессов в их движении, развитии. Широкое применение получил метод моделирования. Возникли различные разделы математики. Наиболее характерной чертой данного периода был интерес к критическому пересмотру вопросов обоснования математики.

Организация математического образования и математических исследований. Создание математических школ и математические журналы. Так же К. Вейерштрасс открывает школу для своих учеников. В период XIX в. деятельность С. В. Ковалевской.

Создание проективной геометрии (К.Ф. Гаусс). Крупнейшими событиями, в значительной мере послужившими началом больших сдвигов в понимании всей структуры математики, явились исследования российского учёного Н.И. Лобачевского. Дальнейшие исследования по основаниям геометрии привели к формулировке полного списка аксиом геометрии, созданию общего понятия пространства, элементами которого могут быть объекты любой природы. Изучение наиболее общих свойств геометрических фигур и пространств, интерес, к которому был вызван развитием неевклидовых геометрий, привёл к созданию новой области математики – топологии (Диссертация М. Фреше (1906г). Теория топологических пространств. Теория размерности. Возникновение алгебраической топологии).

Возникли новые ветви математики: вычислительная математика, математическая логика, теория вероятности. Математика находится в непрерывном развитии. Это обусловлено, во-первых, потребностями жизненной практики, а во-вторых - внутренними потребностями становления математики как науки. Математика оказывает существенное влияние на развитие техники, экономики и управление производством. «Математизация» любых областей знаний, проникновение математических методов во многие сферы практической деятельности человека, быстрый рост вычислительной техники - все это повлекло за собой создание целого ряда математических дисциплин: теория игр, теория информации, математическая статистика, теория вероятности и т.д.

Карл Гаусс сказал: *«Математика — царица наук...»*. Она даёт языковой аппарат для описания любых технических, а по большому счёту, и не технических процессов. Т.е. математический аппарат - это как язык. Без этого языка невозможно описать многие вещи. Роль математики в современной науке постоянно возрастает. Это связано с тем, что, во-первых, без математического описания целого ряда явлений действительности трудно надеяться на их более глубокое понимание и освоение, а, во-вторых, развитие физики, лингвистики, технических и некоторых других наук предполагает широкое использование математического аппарата. Более того, без разработки и использования последнего было бы, например, невозможно ни освоение космоса, ни создание электронно-вычислительных машин, нашедших применение в самых различных областях человеческой деятельности. Современная медицина активно использует различные разделы математики: теорию вероятностей и статистику, теорию дифференциальных уравнений, теорию игр, дифференциальную геометрию и теорию множеств для формализации представлений о структуре и принципах функционирования живых объектов. Многие ученые высказывали мысль о том, что область знаний становится наукой только тогда, когда выражает свои законы в виде математических соотношений.

Контрольные вопросы:

1. Какая наука называется математикой?
2. Назовите исторические этапы развития математики.
3. Зачем изучают математику в учреждениях среднего профессионального образования?
4. Какова роль математики в жизни человека в современном мире?

Задания для самостоятельной работы:

Исследовательская работа «Роль математики в жизни человека»

Аксиоматика

Значение темы:

Математика всегда была неотъемлемой и существеннейшей составной частью человеческой культуры, она является ключом к познанию окружающего мира, базой научно-технического прогресса и важной компонентой развития личности.

При знакомстве с аксиомами стереометрии развивается пространственное воображение, формируется логическое мышление.

Цели занятия: на основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

- аксиомы стереометрии и следствия из аксиом;

уметь:

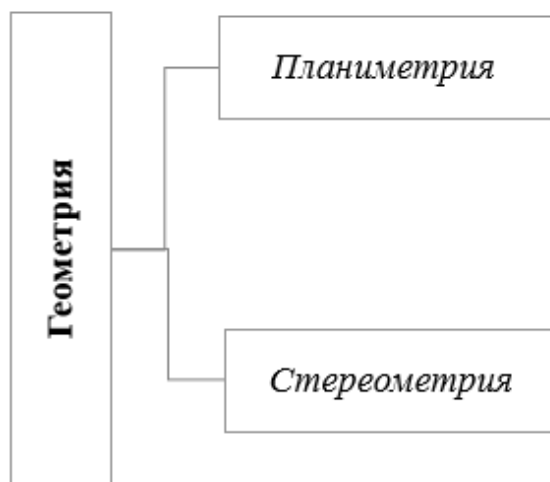
- использовать изученные свойства плоских геометрических фигур при исследовании геометрических объектов пространства, лежащих в одной плоскости;
- находить на рисунке заданные точки, прямые и плоскости;
- иллюстрировать на моделях и изображать на рисунке названные фигуры в заданном взаимном расположении;
- задавать плоскость с помощью трех точек, точки и прямой, пересекающихся или параллельных прямых и изображать её на рисунке.

Краткое содержание темы

Геометрия - это наука о свойствах геометрических фигур.

Планиметрия - это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур на плоскости.

Стереометрия - это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве.



Простейшими (основными) фигурами в пространстве являются точки, прямые и плоскости.

Например, поверхность стола дает представление о части плоскости. В геометрии считают, что плоскость ровная и неограниченная, не имеет краев и толщины.

Определения и обозначения.

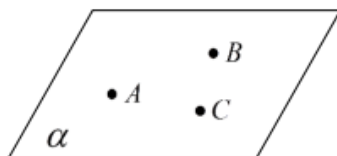
Некоторые понятия геометрии являются основными. Основные фигуры планиметрии - *точка* и *прямая* - автоматически становятся основными фигурами стереометрии. Как и в планиметрии, точки обозначают прописными буквами латинского алфавита – А, В, С, D...; прямые - строчными буквами латинского алфавита – а, b, c, d...

В пространстве рассматривается еще одна основная фигура - плоскость. Ее можно представить, как идеально гладкую поверхность доски, которая продлена во все стороны до бесконечности. Плоскости обозначают строчными буквами греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma \dots$ и изображают по-разному.

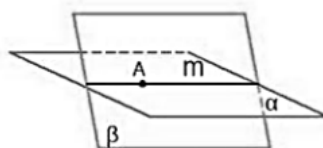
Плоскость понимают также как множество точек.

Аксиомы стереометрии

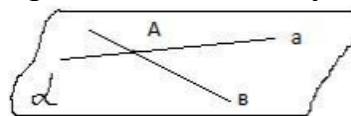
С1: Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.



С2: Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

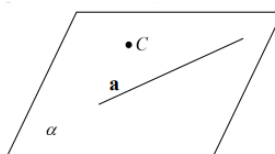


С3: Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

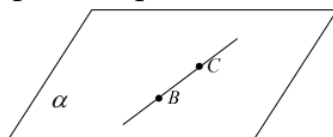


Следствия из аксиом

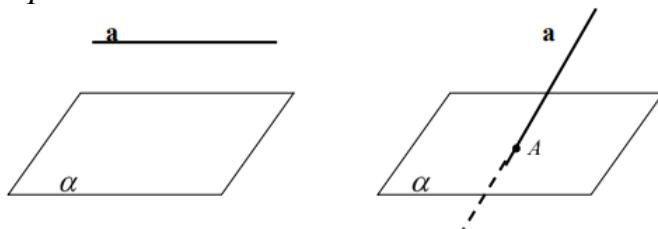
Теорема: (о существовании плоскости, проходящей через данную точку и прямую): Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.



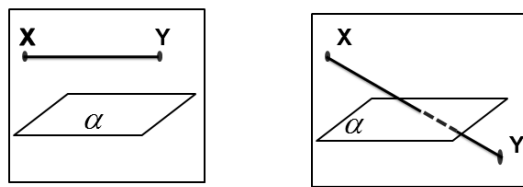
Теорема: (о пересечении прямой с плоскостью): Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.



Из теоремы следует, что плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо *пересекаются в одной точке*.



Теорема: (о разбиении пространства плоскостью на два полупространства): Плоскость, разбивает пространства на два полупространства. Если точки X и Y принадлежат одному полупространству, то отрезок XY не пересекает плоскость. Если же точки X и Y принадлежат разным полупространствам, то отрезок XY пересекает плоскость.

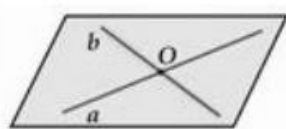


Взаимное расположение прямых в пространстве

Определение. Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Определение. Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются *скрещивающимися*.

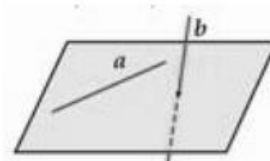
Определение. Две прямые называют пересекающимися прямыми, если они имеют *единственную общую точку*.



пересекающиеся прямые



параллельные прямые



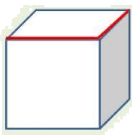
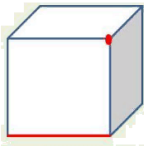
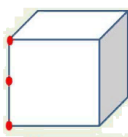
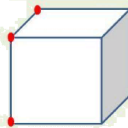
скрещивающиеся прямые

Контрольные вопросы:

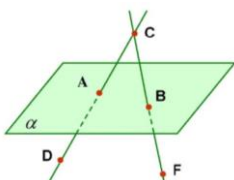
1. Дайте определение стереометрии
2. Что мы называем аксиомой? Теоремой? Какое различие между двумя этими терминами?
3. Сформулируйте ранее изученные аксиомы планиметрии.
4. Сформулируйте аксиомы стереометрии
5. Сформулируйте следствия из аксиом
6. Перечислите способы задания плоскости

Задания для самостоятельной работы:

1. Заполните таблицу и ответьте на вопрос: сколько плоскостей можно провести через выделенные элементы? Объясните свой ответ, используя аксиомы и теоремы.

1.		
2.		
3.		
4.		

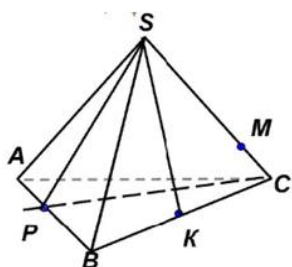
2. По рисунку ответьте на вопросы:



Какие точки принадлежат плоскости α ?

Какие точки не принадлежат плоскости α ?

3. По рисунку определите:



1. Каким плоскостям принадлежат точки: A, M, K, S?
2. Вне каких плоскостей лежат точки: A, M, S, P?
3. По какой прямой пересекаются плоскости
4. $ABS \cap BSC$, $ABC \cap ASC$, $ABC \cap ABS$?

Решите задачи:

Задача 1. Точка M не принадлежит прямой a. Докажите, что через прямую a и точку M проходит плоскость.

Задача 2. Точки M, N, P, Q не лежат в одной плоскости. Могут ли прямые MQ и NP пересекаться?

Задача 3. Точки A , B , C и D лежат в плоскости α , а точка M не лежит в этой плоскости. Пересекаются ли плоскости, проходящие через точки A , B , M и D , C , M ?

Параллельность в пространстве

Значение темы:

Математика всегда была неотъемлемой и существеннейшей составной частью человеческой культуры, она является ключом к познанию окружающего мира, базой научно-технического прогресса и важной компонентой развития личности.

При знакомстве с темой «Параллельность в пространстве» развивается пространственное воображение, формируется логическое мышление.

Цели занятия: на основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

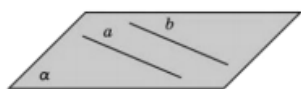
- определение параллельных и скрещивающихся прямых;
- теорема о параллельности прямых в пространстве;
- признак параллельности прямых;
- признак параллельности прямой и плоскости;
- признак параллельности плоскостей в пространстве;
- теорема о существовании плоскости, параллельной данной плоскости;
- свойства параллельных плоскостей.

уметь:

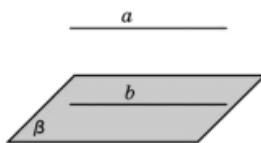
- характеризовать пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые;
- находить на моделях и рисунках пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые;
- правильно изображать на рисунках пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые;
- характеризовать случаи взаимного расположения прямой и плоскости;
- находить на моделях и рисунках прямые, пересекающие плоскость и параллельные ей;
- правильно изображать на рисунках пересечение прямой и плоскости, параллельность прямой и плоскости;
- задавать прямую, параллельную плоскости: доказывать параллельность прямой и плоскости, используя соответствующие свойства;
- характеризовать случаи взаимного расположения плоскостей;
- находить на рисунках пересекающиеся и параллельные плоскости;
- использовать свойства комбинации параллельных плоскостей с прямыми и другими плоскостями для решения задач.

Краткое содержание темы

Случаи параллельности в пространстве:



параллельность прямых



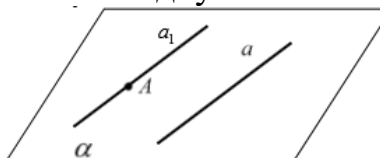
параллельность прямой и плоскости



параллельность плоскостей

Параллельность прямых в пространстве

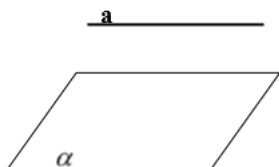
Теорема: (о параллельности прямых в пространстве): Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.



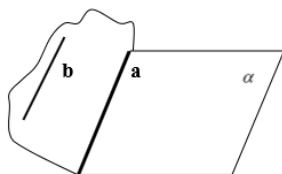
Теорема: (признак параллельности прямых): Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.

Параллельность прямой и плоскости

Определение. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не пересекаются.



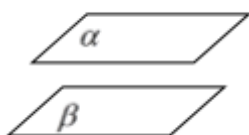
Теорема: (признак параллельности прямой плоскости): Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.



$$b \notin \alpha, a \in \alpha \text{ и } b \parallel a, \text{ то } b \parallel \alpha$$

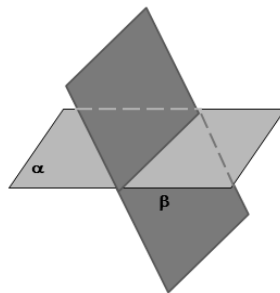
Параллельность плоскостей

Определение. Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.



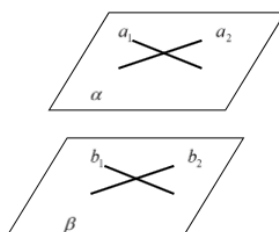
$$\text{Если } \alpha \text{ не пересекается с } \beta, \text{ то } \alpha \parallel \beta$$

Определение. Две плоскости называют *пересекающимися*, если они не совпадают, и у них есть общие точки.

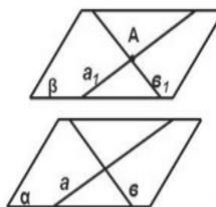


Пересечением этих плоскостей является *прямая линия*.

Теорема: (признак параллельности плоскостей в пространстве): Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

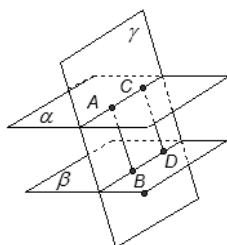


Теорема: (о существовании плоскости параллельной данной плоскости): Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной и притом только одну.

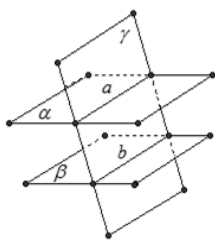


Свойства параллельных плоскостей:

1) отрезки параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями, равны.



2) если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.

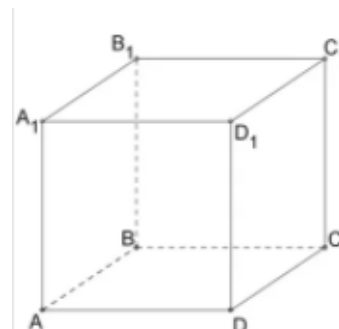


Контрольные вопросы:

1. Какие прямые в пространстве называются параллельными?
2. Какие прямые в пространстве называются скрещивающимися?
3. Сформулируйте теорему о параллельности прямых в пространстве
4. Что значит, прямая и плоскость параллельны?
5. Какие плоскости называются параллельными?
6. Какие плоскости называются пересекающимися?
7. Сформулируйте признак параллельности плоскостей в пространстве
8. Сформулируйте свойства параллельности плоскостей.

Задания для самостоятельной работы:

1. Определи взаимное расположение плоскостей ABC и AA_1B_1
2. Назови плоскость параллельную AA_1B_1
3. Определи взаимное расположение плоскостей BCD и $A_1B_1C_1$
4. Объясни равенство отрезков AA_1 и CC_1 , используя теорию стереометрии.



Решить задачи:

Задача 1. Вершина Q параллелограмма $MNPQ$ лежит в плоскости α , а точки M, N, P не лежат в этой плоскости.

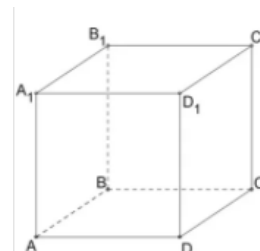
Докажите, что прямые MN и NP пересекают плоскость α .

Задача 2. Сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости α , а вершина C не принадлежит плоскости. Точки M и N середины сторон AC и BC .

Докажите, что прямая MN параллельна плоскости α

Задача 3. Докажите, что если данная прямая параллельна прямой, по которой пересекаются две плоскости, и не лежит в этих плоскостях, то она параллельна этим плоскостям.

Задача 4. Докажите, что прямые AA_1 и B_1C_1 в кубе являются скрещивающимися.



Перпендикулярность в пространстве

Значение темы:

Математика всегда была неотъемлемой и существеннейшей составной частью человеческой культуры, она является ключом к познанию окружающего мира, базой научно-технического прогресса и важной компонентой развития личности.

При знакомстве с темой «Перпендикулярность в пространстве» развивается пространственное воображение, формируется логическое мышление.

Цели занятия: на основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

- определение перпендикулярных прямых в пространстве;
- определение перпендикулярных плоскостей;
- теорема о перпендикулярности прямых в пространстве;
- признак перпендикулярности прямой и плоскости;
- свойства перпендикулярных прямой и плоскости;
- определение перпендикуляра, наклонной, проекции наклонной;
- теорема о трёх перпендикулярах;
- определение перпендикулярных плоскостей в пространстве.
- признак перпендикулярности плоскостей.
- определение общего перпендикуляра.
- определение расстояния между скрещивающимися прямыми.

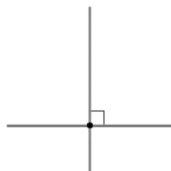
уметь:

- характеризовать перпендикулярность прямой и плоскости;
- задавать прямую, перпендикулярную плоскости;
- использовать свойства перпендикулярности прямой и плоскости для решения задач;
- находить на моделях и рисунках прямые, перпендикулярные плоскостям, перпендикулярные плоскости.
- находить расстояние между скрещивающимися прямыми;
- использовать признак перпендикулярности плоскостей для решения задач

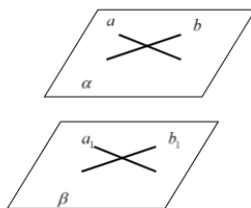
Краткое содержание темы

Перпендикулярность прямых в пространстве

Определение. Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.

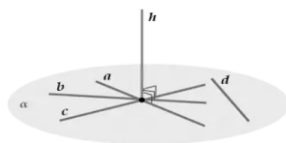


Теорема: (о перпендикулярности прямых в пространстве): Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.

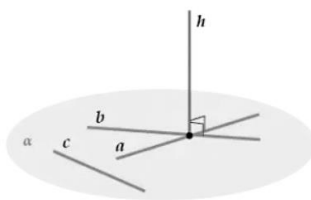


Перпендикулярность прямых и плоскостей

Определение. Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна всем прямым в этой плоскости.

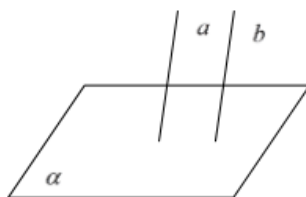


Теорема: (признак перпендикулярности прямой и плоскости): Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

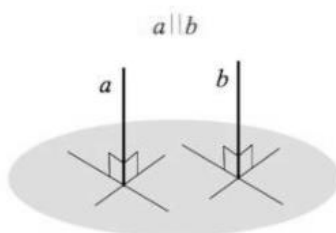


Свойства перпендикулярных прямой и плоскости:

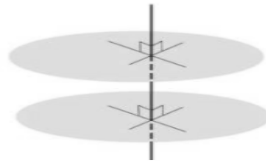
1) если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.



2) две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны

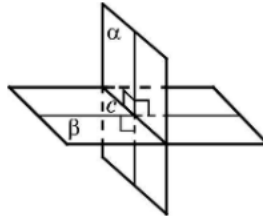


3) две плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны между собой

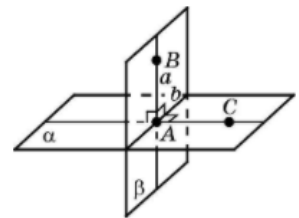


Перпендикулярность плоскостей

Определение. Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90° .



Теорема (признак перпендикулярности плоскостей): Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.



Следствие 1: если в плоскости есть хотя бы одна прямая, перпендикулярная другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны.

Следствие 2: если плоскость перпендикулярна прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, то эта плоскость перпендикулярна каждой из данных плоскостей.

Свойства перпендикулярных плоскостей

1) если прямая лежит в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярна линии их пересечения, то эта прямая перпендикулярна другой плоскости.

2) если прямая, проведенная через точку одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна другой плоскости, то она лежит в первой из них.

3) если прямая, проведенная через точку одной из двух пересекающихся плоскостей, перпендикулярна другой плоскости и не лежит в первой, то данные плоскости не перпендикулярны.

4) если две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, пересекаются, то прямая их пересечения перпендикулярна третьей плоскости.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

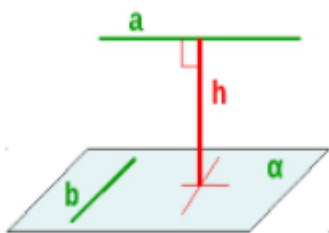
Определение. Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них.

Теорема. Две скрещивающиеся прямые имеют только один общий перпендикуляр, который также является перпендикуляром между плоскостями, проведенными через эти прямые.

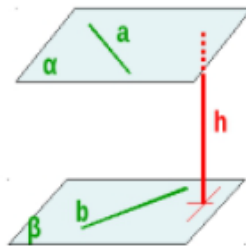
Существует три способа определения расстояния между скрещивающимися прямыми

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине перпендикуляра, опущенного из:

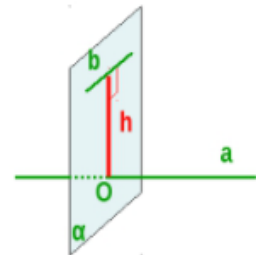
любой точки одной из прямых на плоскость, проходящую через другую прямую, параллельно первой прямой



любой точки плоскости, проходящей через одну из прямых на плоскость, параллельную ей, проходящую через другую прямую.



точки пересечения одной из прямых с перпендикулярной ей плоскостью на другую прямую, лежащую в этой плоскости



Теорема о трех перпендикулярах

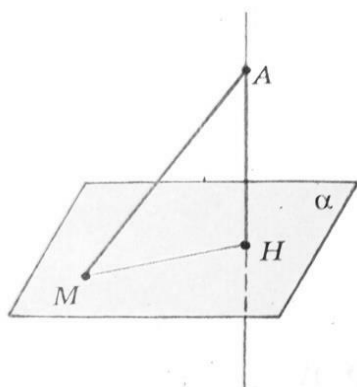
Определение. Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости.

Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра*.

Расстоянием от точки до плоскости называется *длина перпендикуляра*, опущенного из этой точки на плоскость.

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости.

Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием наклонной*. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется *проекцией наклонной*.



Отрезок АН называется *перпендикуляром*, проведенным из точки А к плоскости α .

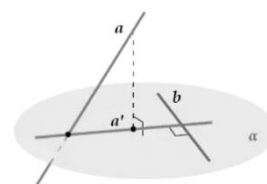
Точка Н – *основание перпендикуляра*.

Отрезок АМ называется *наклонной*, проведенной из точки А к плоскости α .

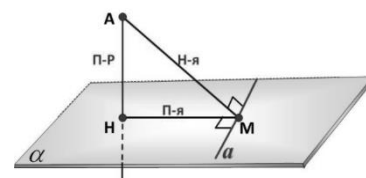
Точка М – *основание наклонной*.

Отрезок НМ называется *проекцией наклонной* АМ на плоскость α .

Теорема (о трех перпендикулярах): если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна наклонной.



Теорема (обратная о трех перпендикулярах). Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

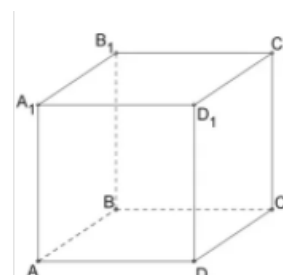


Контрольные вопросы:

1. Дайте определение перпендикулярным прямым.
2. Какая прямая называется перпендикулярной плоскости?
3. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах (и обратную к ней)
5. Какая плоскость называется перпендикулярной к данной.
6. Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей.
7. Сформулируйте следствие перпендикулярности плоскостей
8. Как измерить расстояние между скрещивающимися прямыми
9. Сформулируйте способы определения расстояния между скрещивающимися прямыми.

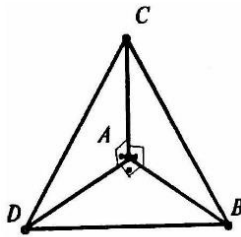
Задания для самостоятельной работы:

1. Назовите прямую перпендикулярную BB_1
2. Назовите прямую перпендикулярную АВ
3. Назовите плоскость перпендикулярную A_1B_1
4. Назовите плоскость перпендикулярную CC_1



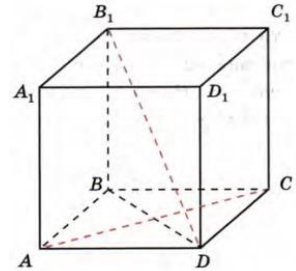
Решите задачи:

Задача 1.



Прямые AB , AC и AD попарно перпендикулярны. $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1,5$ см. Найти отрезок CD .

Задача 2. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, основанием которого является ромб $ABCD$, а боковое ребро перпендикулярно к плоскости основания. Докажите, что диагональ $B_1 D$ параллелепипеда перпендикулярна к диагонали AC его основания.



Углы между прямыми и плоскостями в пространстве

Значение темы:

Математика всегда была неотъемлемой и существеннейшей составной частью человеческой культуры, она является ключом к познанию окружающего мира, базой научно-технического прогресса и важной компонентой развития личности.

При знакомстве с темой «Углы между прямыми и плоскостями в пространстве» развивается пространственное воображение, формируется логическое мышление.

Цели занятия: на основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

- определение угла между скрещивающимися прямыми;
- определение угла между прямой и плоскостью;
- определение угла между плоскостями;
- определение двугранного, трёхгранного и многогранного углов.

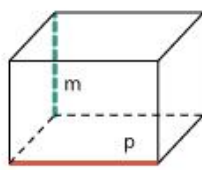
уметь:

- определять полупрямые, задающие угол между прямой и плоскостью;
- задавать линейный угол двугранного угла и изображать его на рисунке;
- измерять угол между прямой и плоскостью, линейный угол двугранного угла.

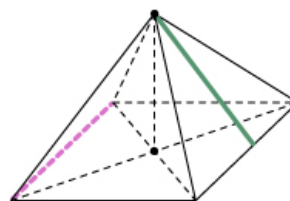
Краткое содержание темы

Определение угла между скрещивающимися прямыми

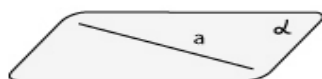
Скрещивающиеся прямые не пересекаются и не параллельны друг другу. Через них невозможно провести плоскость. Скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях.



скрещиваются
 $m \not\parallel p$



Определение. Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.



a и b - скрещиваются

$a \in \alpha$

$b \in \beta$

$\alpha \parallel \beta$



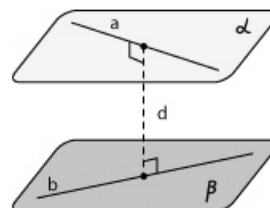
проведем в плоскости β

прямую $c \parallel a$

Угол φ между b и c равен углу между a и b

Угол между скрещивающимися прямыми - это угол между параллельными им прямыми, лежащими в одной плоскости.

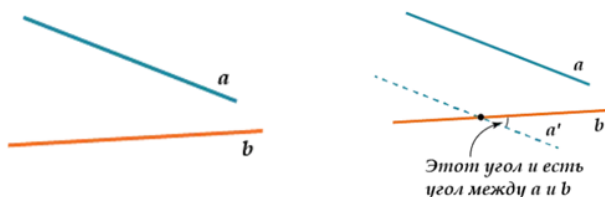
Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра или расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которых они лежат.



Расстояние от точки до плоскости — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости - длина перпендикуляра, опущенного на плоскость из любой точки этой прямой.

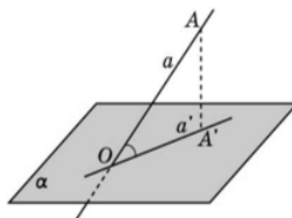
Чтобы найти угол между скрещивающимися прямыми, надо из любой точки на одной из этих прямых провести прямую, параллельную другой прямой, и полученный угол будет углом между скрещивающимися прямыми.



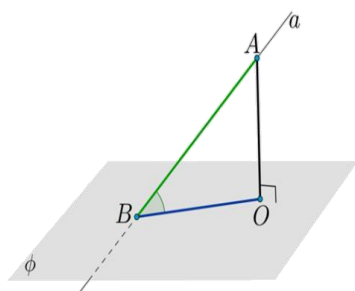
Этот угол и есть угол между a и b

Определение угла между прямой и плоскостью

Определение. Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.



Чтобы найти угол между прямой и плоскостью, надо из любой точки на данной прямой опустить перпендикуляр на плоскость, соединить точки начала перпендикуляра и начала наклонной — проекция наклонной на плоскость, полученный угол между наклонной и проекцией - это и будет углом между прямой и плоскостью.



Шаг 1: из точки $A \in a$ провести перпендикуляр AO на плоскость ϕ (O – основание перпендикуляра);

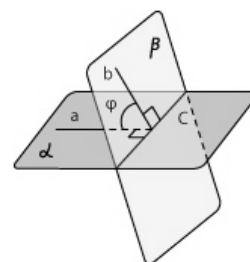
Шаг 2: BO – проекция наклонной AB на плоскость ϕ ;

Шаг 3: тогда угол между прямой a и плоскостью ϕ равен $\angle ABO$.

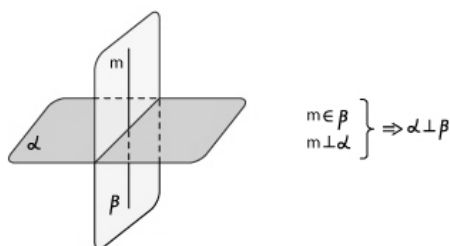
Определение угла между плоскостями

Определение. Угол между плоскостями – это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведенными в этих плоскостях.

Другими словами, в плоскости α мы провели прямую a , перпендикулярную c . В плоскости β – прямую b , также перпендикулярную c . Угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми a и b .

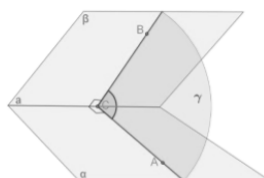


Если плоскость α проходит через перпендикуляр к плоскости β , то плоскости α и β перпендикулярны.



Определение. Угол между параллельными плоскостями равен нулю.

Определение. Угол между двумя пересекающимися по прямой a плоскостями α и β – это угол между двумя пересекающимися прямыми BC и AC , по которым плоскости α и β пересекаются с плоскостью γ , перпендикулярной к прямой a .

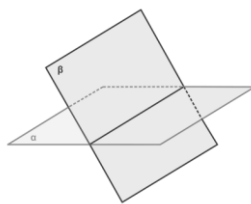


Чтобы найти угол между двумя плоскостями, надо определить прямую пересечения двух плоскостей. Из любой точки данной прямой провести к ней две перпендикулярные прямые, лежащие в данных плоскостях. Полученный угол между проведенными прямыми это и будет угол между двумя плоскостями.

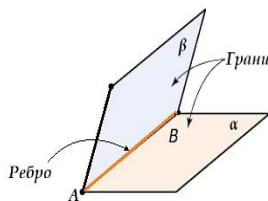
На чертеже: α, β – плоскости, $\alpha \cap \beta = a$, $a \perp AC$, $AC \subset \alpha$, $BC \perp a$, $BC \subset \beta$, т.е. $\angle(AC, BC) = \angle(\alpha, \beta)$.

Определение двугранного, трёхгранного и многогранного углов.

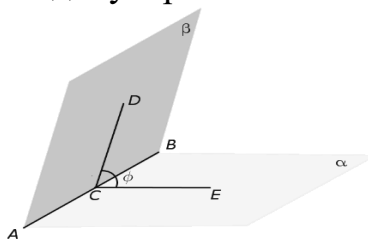
Определение. Двугранный угол - это часть пространства, заключённая между двумя полуплоскостями, имеющими одну общую границу.



Полуплоскости называются *гранями*, а ограничивающая их прямая – *ребром* двугранного угла.



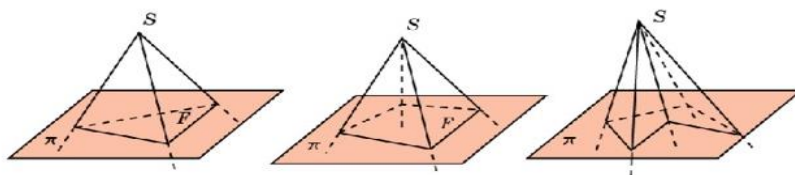
Угол, который получается в сечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру, называют линейным углом двугранного угла. (Угол DCE, образованный перпендикулярами CD и CE)



Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.

Многогранные углы

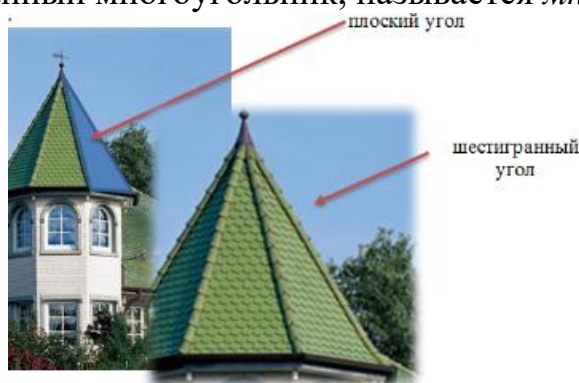
В зависимости от числа граней многогранные углы бывают трехгранными, четырехгранными, пятигранными



Определение. Трёхгранный угол – это часть пространства, ограниченная тремя плоскими углами с общей вершиной и попарно общими сторонами, не лежащими в одной плоскости. Общая вершина этих углов называется *вершиной* трёхгранного угла. Стороны углов называются *ребрами*, плоские углы при вершине трёхгранного угла называются его *гранями*. Грани трёхгранного угла образуют двугранные углы.



Фигура в пространстве, образованная лучами с вершиной в точке, пересекающими данный многоугольник, называется *многогранным углом*.



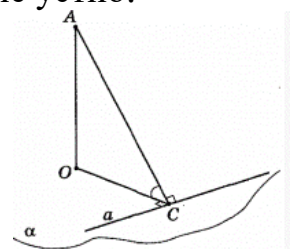
Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение угла между скрещивающимися прямыми.
2. Как измерить угол между скрещивающимися прямыми?
3. Сформулируйте определение угла между прямой и плоскостью.
4. Как измерить угол между прямой и плоскостью?
5. Сформулируйте определение угла между плоскостями
6. Как измерить угол между плоскостями?
7. Дайте понятие двугранного угла. Как он измеряется?
8. Дайте понятие многогранного угла

Задания для самостоятельной работы:

1. Укажите на рисунке и сформулируйте определение устно:

- а) проекция наклонной
- б) наклонная
- в) перпендикуляр
- г) основание перпендикуляра



Решите задачи

Задача 1. Отрезок AD перпендикулярен к плоскости равнобедренного треугольника ABC . Известно, что $AB = AC = 5$ см, $BC = 6$ см. $AD = 12$ см. Найти расстояние от концов отрезка AD до прямой BC .

Задача 2. Прямая BD перпендикулярна к плоскости треугольника ABC . Известно, что $BD = 9$ см, $AC = 10$ см, $BC = BA = 13$ см. Найти расстояние от точки D до прямой AC и площадь треугольника ACD .

РАЗДЕЛ МНОГОГРАННИКИ

Призма. Параллелепипед. Куб

Значение темы:

«Никогда до настоящего времени мы не жили в такой геометрический период. Все вокруг – геометрия». Эти слова, сказанные великим французским архитектором Ле Корбюзье в начале 20 века, очень точно характеризуют и наше время. Мир, в котором мы живем, наполнен геометрией домов и улиц, гор и полей, творениями природы и человека. Форму шестиугольной призмы имеют соты пчел, кристаллическую решетку в форме призм имеют и многие химические вещества

При знакомстве с темой «Призма. Параллелепипед. Куб» развивается пространственное воображение, формируется логическое и критическое мышление, кругозор.

Цели занятия: на основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

- определение многогранника;
- определение призмы, её элементов;
- свойства призмы;
- определение прямой призмы;
- определение параллелепипеда;
- определение куба;
- свойства параллелепипеда;

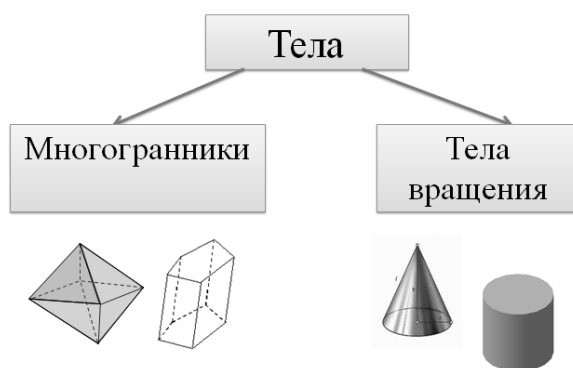
уметь:

- различать и показывать на моделях прямую и правильную призмы, прямоугольный параллелепипед, куб;
- изображать на рисунках четырехугольные и треугольные призмы и их элементы;
- использовать свойства призмы, параллелепипеда и куба при решении стереометрических задач.

Краткое содержание темы

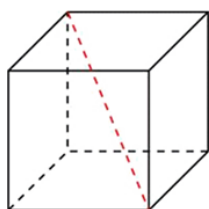
Определение. Многогранник - геометрическое тело, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками - гранями.

Определение. Телом называется ограниченная замкнутая область. Граница тела называется поверхностью тела.

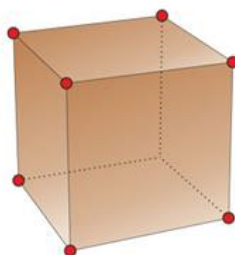


Элементы многогранника:

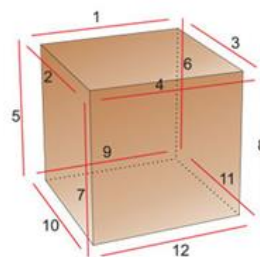
- Грани - это многоугольники, из которых составлен многогранник.
- Ребра - стороны граней.
- Вершины – концы ребер.
- Диагональ многогранника – отрезок, соединяющий две вершины многогранника, не лежащие в одной плоскости.



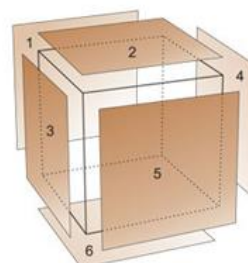
диагональ



Вершины многогранника



Ребра многогранника

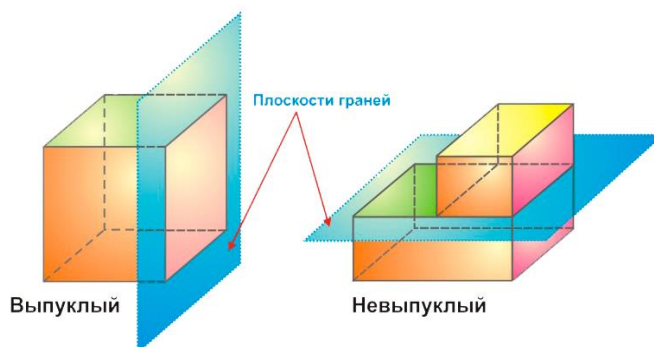


Грани многогранника

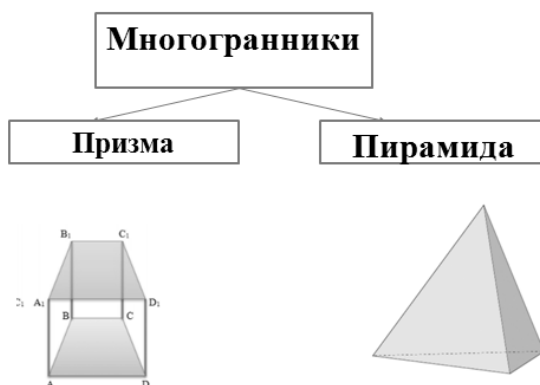
Виды многогранников

Определение. Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

Определение. Многогранник называется *невыпуклым*, если он не расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

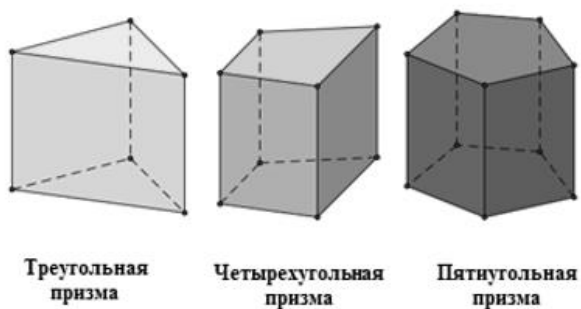


Среди многогранников различают призмы и пирамиды.

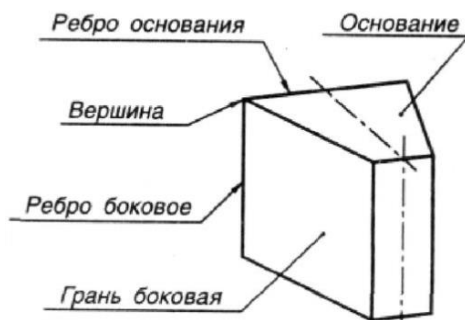


Определение и свойства призмы

Определение. Призма – это многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников и параллелограммов, имеющих общие стороны с каждым из оснований



Элементы призмы:



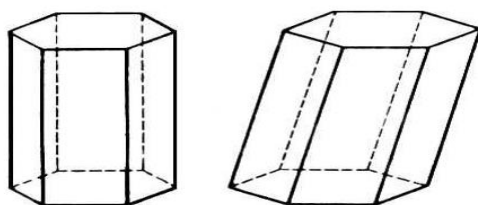
Многоугольники называются *основаниями призмы*, а отрезки, соединяющие основания – *боковыми ребрами призмы*.

Высота призмы – перпендикуляр, опущенный из одной из вершин призмы на плоскость противоположного основания.

Свойства призмы:

- 1) основания призмы – это равные многоугольники.
- 2) боковые грани призмы имеют вид параллелограмма.
- 3) боковые ребра призмы параллельные и равны.

Определение. Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям. Иначе призма – *наклонная*



Определение. Прямая призма называется *правильной*, если ее основания являются правильными многоугольниками.

Свойства правильной призмы:

- 1) основания правильной призмы являются правильными многоугольниками;
- 2) боковые грани правильной призмы являются равными прямоугольниками;
- 3) боковые ребра правильной призмы равны.

Теорема. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений ($d^2 = a^2 + b^2 + c^2$)

Определение. *Параллелепипед* - это призма, основания (все грани) – параллелограммы.

Определение. Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*. У прямоугольного параллелепипеда все грани – прямоугольники.

Определение. Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется *кубом*.

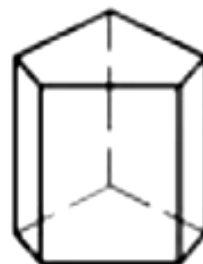
Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение многогранника
2. Дайте понятие «Тело»
3. Расскажите о видах многогранников
4. Сформулируйте определение понятия «Призма», «Куб», «Параллелепипед»
5. Перечислите основные элементы призмы
6. Определение диагоналей призмы
7. Определение высоты призмы.
8. Свойства боковых граней призмы, боковых ребер призмы, свойства оснований призмы
9. Что является основанием призмы?
10. Какая призма называется прямой? Наклонной?

Задания для самостоятельной работы

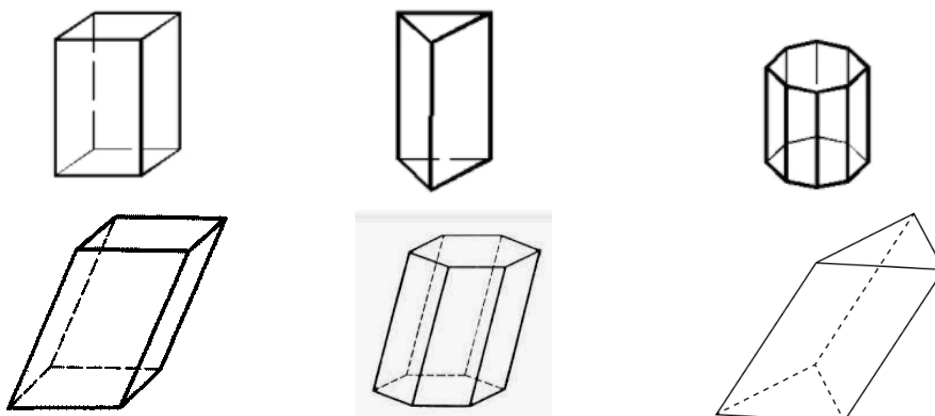
1. Укажите на рисунке

1. Вершина
2. Основание
3. Боковые ребра
4. Боковые грани
5. Противоположные грани

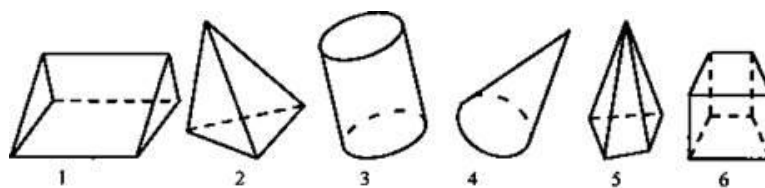


2. Изобразите и дайте обозначение призм: треугольная, четырехугольная, пятиугольная

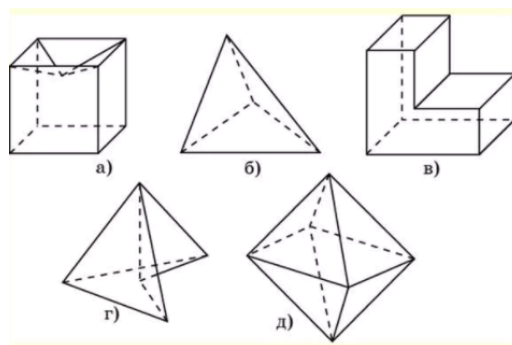
3. Изобразите призму и постройте на рисунке высоту призмы и дайте наименование каждому многограннику:



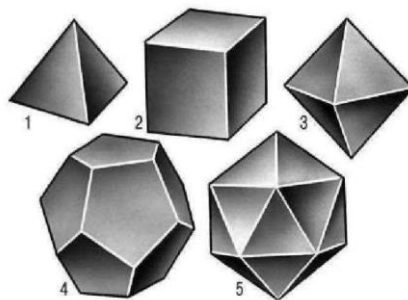
4. Из представленных фигур выбрать многогранник:



5. Из представленных фигур выбрать выпуклые и невыпуклые многогранники:



6. Из представленных тел выбрать призму:



Решите задачи:

Задача 1. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45° . Найдите боковое ребро параллелепипеда.

Задача 2. Основанием прямого параллелепипеда является ромб с диагоналями 10 см и 24 см, а высота параллелепипеда 10 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда.

Задача 3. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда по трем измерениям: 1, 2, 2.

Задача 4. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 25 см, а диагональ ее боковой грани 20 см. Найдите высоту призмы

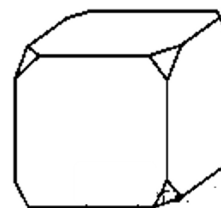
Задача 5. Боковое ребро наклонной треугольной призмы равно 18 см и наклонено к плоскости основания под углом 45° . Найдите высоту призмы

Задача 6. Высота призмы равна 5 см. Чему равно расстояние между плоскостями оснований призмы?

Задача 7. Выполните чертеж наклонной четырехугольной призмы, обозначьте ее и запишите:

Задача 8. Дано $ABCA_1B_1C_1$ - прямая треугольная призма, $AC=BC$, угол ACB равен 90° градусов, $BN=NA$, угол CNC_1 равен 45° градусов, CC_1 равен 6 см. Найдите высоту призмы, площадь основания и боковой грани CC_1B_1B .

Задача 9. От деревянного кубика отпилили все его вершины (см. рис.). Сколько граней у получившегося многогранника (невидимые ребра на рисунке не обозначены)?



Задача 10. Дана прямая четырехугольная призма со сторонами основания 5 и 7 см. Боковое ребро призмы равно 8 см. Вычислите диагональ призмы.

Задача 11. Дана правильная прямая четырехугольная призма с площадью основания 144 см^2 . Боковое ребро призмы равно 7 см. Вычислите диагональ призмы.

Задача 12. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10 см, 17 см и 21 см, а высота призмы - 18 см. Найдите площадь многоугольника BB_1D_1D . *Примечание:* формула Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p - полупериметр.

Пирамида. Тетраэдр

Значение темы:

«Никогда до настоящего времени мы не жили в такой геометрический период. Все вокруг – геометрия». Эти слова, сказанные великим французским архитектором Ле Корбюзье в начале 20 века, очень точно характеризуют и наше время. Мир, в котором мы живем, наполнен геометрией домов и улиц, гор и полей, творениями природы и человека. Всем нам известны египетские пирамиды, самая известная из них, пирамида Хеопса. В природе встречаются не только такие огромные пирамиды, но и очень маленькие. Так, например, элементарная ячейка кристалла алмаза имеет тетраэдрическое строение, пространственное строение молекулы метана вписывается в геометрическую фигуру тетраэдр.

При знакомстве с темой «Пирамида. Тетраэдр» развивается пространственное воображение, формируется логическое и критическое мышление. Знания, полученные на занятиях по математике, пригодятся вам на занятиях по химии, биологии, истории др..

Цели занятия: на основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

- определение пирамиды и её элементов;
- определение усеченной и правильной пирамиды;
- определение апофемы.

уметь:

- различать и показывать на моделях пирамиду и правильную пирамиду;
- изображать на рисунках треугольные и четырехугольные пирамиды и их элементы;
- в несложных случаях изображать на рисунках треугольных и четырехугольных пирамид высоту пирамиды, связывая её элементы на основе соответствующих свойств;
- использовать свойства пирамиды, усеченной пирамиды при решении стереометрических задач.

Краткое содержание темы

Определение. Пирамида - многогранник, в основании которого лежит многоугольник, а остальные грани являются треугольниками, которые имеют общую вершину.

Элементы пирамиды:

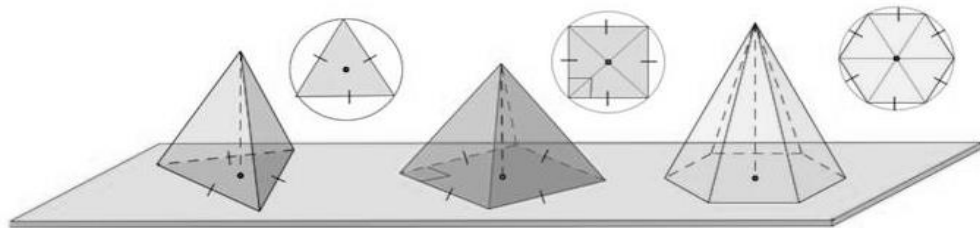
- *вершина пирамиды* - точка, соединяющая боковые рёбра и не лежащая в плоскости основания;
- *боковые грани* - треугольники, сходящиеся в вершине пирамиды;
- *боковые ребра* - общие стороны боковых граней;

- *основание* - многоугольник, которому не принадлежит вершина пирамиды;
- *высота* - отрезок перпендикуляра, проведённого через вершину пирамиды к плоскости её основания (концами этого отрезка являются вершина пирамиды и основание перпендикуляра);
- *апофема* - высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины

Свойства пирамиды:

- 1) если боковые ребра имеют одинаковую длину, то около основания пирамиды можно описать окружность, при этом вершина пирамиды будет проецироваться в центр этой окружности. боковые ребра образуют с плоскостью основания одинаковые углы;
- 2) если боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания, то около основания пирамиды можно описать окружность, при этом вершина пирамиды будет проецироваться в центр этой окружности, а также высоты боковых граней имеют равную длину.

Виды пирамид



Определение. Пирамида называется *прямоугольной*, если одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно основанию

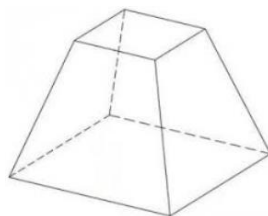
Определение. Пирамида называется *правильной*, если ее основание является правильным n – угольником, а основание высоты пирамиды совпадает с центром этого n - угольника.

Свойства правильной пирамиды

В правильной n – угольной пирамиде:

- боковые ребра равны;
- боковые грани – равные равнобедренные треугольники;
- углы наклона боковых ребер к плоскости основания равны;
- углы наклона боковых граней к плоскости основания равны;
- апофемы равны.

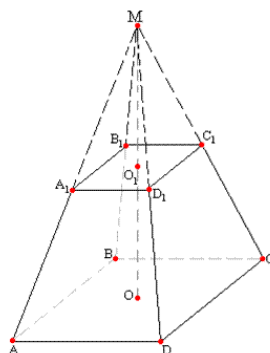
Определение. Усеченная пирамида - многогранник, образованный пирамидой и её сечением, параллельным основанию.



Элементы усеченной пирамиды:

Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях (ABC) и $(B_1C_1D_1)$, называют *основаниями* усеченной пирамиды, остальные грани называют *боковыми гранями*. Основания усеченной пирамиды представляют собой подобные многоугольники, боковые грани - трапеции.

Определение. Усеченную пирамиду, которая получается из правильной пирамиды, также называют *правильной*. Боковые грани правильной усеченной пирамиды - равные равнобокие трапеции, их высоты называют *апофемами*.

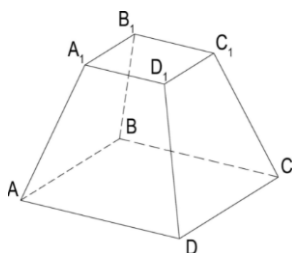


Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение многогранника
2. Расскажите о видах многогранников
3. Перечислите основные элементы пирамиды
4. Сформулируйте понятие пирамида
5. Перечислите основные элементы пирамиды
6. Виды пирамид
7. Сформулируйте понятие «Усеченная пирамида»
8. Какая пирамида называется правильной и прямой?
9. Сформулируете определение правильной и прямой усеченной пирамиды.

Задания для самостоятельной работы

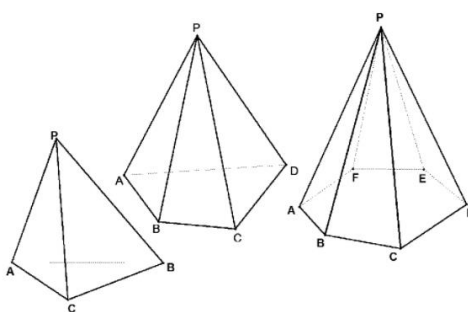
1. Укажите на рисунке элементы пирамиды:



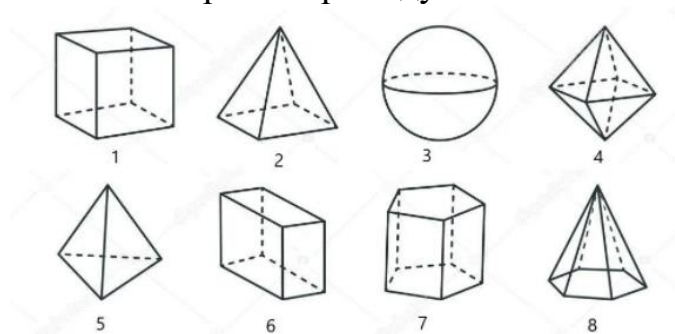
1. Вершина
2. Основание
3. Боковые ребра
4. Боковые грани
5. Противоположные грани
6. Апофема



2. Постройте на рисунке высоту, апофему пирамиды и дайте обозначение, сформулируйте определение:



3. Из представленных тел выбрать пирамиду:



Решите задачи :

Задача 1. Высота пирамиды равна 3 см. Чему равно расстояние от вершины пирамиды до плоскости основания?

Задача 2. Боковые ребра треугольной пирамиды равны 7 см, 12 см, 5 см. Одно из них перпендикулярно к плоскости основания. Чему равна высота пирамиды?

Задача 3. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$. Высота равна 6 см, угол, образованный боковым ребром с плоскостью основания – 30° . Найти ребро пирамиды AS .

Задача 4. Основание пирамиды - параллелограмм со сторонами 6 и 8 см, высота пирамиды 12 см, а ее боковые ребра равны между собой. Найдите длину бокового ребра.

Задача 5. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 4 см, а боковое ребро 5 см. Найдите сторону основания пирамиды.

Задача 6. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро 10 дм, образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите высоту пирамиды.

Задача 7. В четырехугольной пирамиде $SABCD$, стороны основания 8 см и 6 см, боковые ребра равны между собой и имеют длину 16 см. Найти высоту пирамиды.

Задача 8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, ребро равно 13 см, ребро основания 24 см. Найдите длину отрезка от вершины до центра основания.

Задача 9. В правильной четырехугольной пирамиде точка O – центр основания, S – вершина, $SO=8$ см, $DB=30$ см. Найдите длину отрезка SC .

Задача 10. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ расстояние от вершины до основания равно 48 м, боковое ребро пирамиды 60 м. Найдите длину диагонали основания.

Сечение многогранников

Значение темы:

Сечения многогранников используются при решении многих задач стереометрии.

При знакомстве с темой «Сечения многогранников» развивается пространственное воображение, формируется логическое и критическое мышление.

Цели занятия: на основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

- виды сечений многогранников;
- правила построения сечений;
- построение сечения методом следа.

уметь:

- строить простейшие сечения куба, призмы и пирамиды

Краткое содержание темы

Сечения многогранников используются при решении многих задач стереометрии.

Определение. Сечением поверхности геометрических тел называется плоская фигура, полученная в результате пересечения тела плоскостью и содержащая точки, принадлежащие как поверхности тела, так и секущей плоскости.

Построить сечение - определить какие ребра пересекает секущая плоскость, вид полученного сечения и точное положение точек пересечения секущей плоскости с этими ребрами. Плоская фигура, полученная при пересечении любого многогранника плоскостью, представляет собой некоторый многоугольник. Вершины этого многоугольника находятся как точки пересечения ребер многогранника с секущей плоскостью, а стороны многоугольника строятся как линии пересечения граней многогранника с секущей плоскостью.

Секущую плоскость можно задать различными способами. Наиболее часто её задают с помощью трех точек, не лежащих на одной прямой, однако возможны и другие способы:

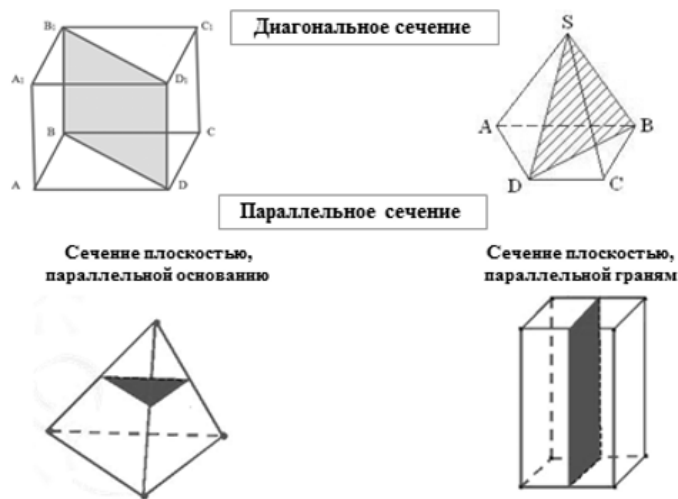
- точкой и прямой, не проходящей через неё;
- двумя пересекающимися прямыми;
- двумя параллельными прямыми;
- точкой и двумя скрещивающимися прямыми, которым секущая плоскость параллельна.

Основные виды сечений многогранников

Диагональное сечение параллелепипеда – это сечение плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани. Это сечение всегда представляет собой прямоугольник или квадрат. Диагональное сечение разбивает параллелепипед на две призмы. *Диагональным сечением пирамиды* называется сечение её плоскостью, проходящей через два боковых ребра пирамиды, не лежащих в одной грани. Это сечение всегда представляет собой треугольник. Любое диагональное сечение разбивает пирамиду на две пирамиды.

Сечение плоскостью, *параллельной основанию* является фигура подобная или равная основанию.

Сечение плоскостью, *параллельной граням* является параллелограммы или прямоугольники для призмы.



Правила построения сечений многогранников

1. Проводим прямые через точки, лежащие в одной плоскости;
2. Ищем прямые пересечения плоскости сечения с гранями многогранника, для этого:

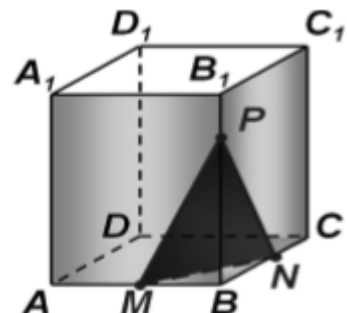
- ищем точки пересечения прямой принадлежащей плоскости сечения с прямой, принадлежащей одной из граней (лежащие в одной плоскости);

- параллельные грани плоскость сечения пересекает по параллельным прямым.

Пример: Строим сечение параллелепипеда по трем точкам (М, Р и N), лежащим на трех соседних ребрах.

Построение:

1. Отрезок MN. Так как М и N лежат на нижней грани



2. Отрезок NP. Так как P и N лежат на боковой грани
3. Отрезок MP. Так как эти точки тоже лежат в одной плоскости
4. ΔMNP – искомое сечение

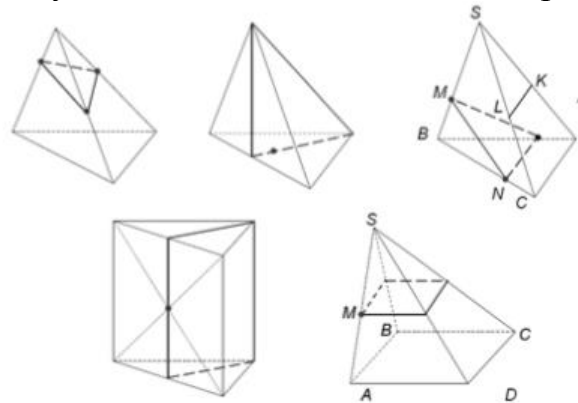
Методы построений сечений многогранников

Существует три основных метода построения сечений многогранников:

- 1) метод следов;
- 2) метод вспомогательных сечений;
- 3) комбинированный метод.

Первые два метода являются разновидностями аксиоматического метода построения сечений.

Аксиоматический метод лежит в основе выполнения следующих действий: построение изображений конструктивных элементов, сводящихся к проведению прямой через 2 заданные точки или прямой параллельной данной через заданную точку вне нее на основе аксиом стереометрии.



Метод следов

Определение. Прямую, по которой секущая плоскость пересекает плоскость какой-либо грани многогранника, называют *следом секущей* плоскости на плоскости этой грани, а отрезок следа, лежащий в грани многогранника, называют *следом секущей* плоскости на этой грани.

Суть метода следов – восстановить следы секущей плоскости на ребрах и гранях многогранника с помощью построения следа секущей плоскости на основание многогранника.

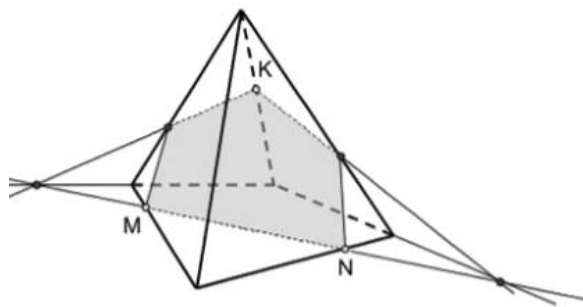
Ограничения применения:

- выбранная прямая секущей плоскости параллельна плоскости проекций;
- след выбранной прямой секущей плоскости находится за рамками чертежа (прямая «почти параллельна» плоскости проекций);
- условием задачи или предыдущим шагами решения установлено положение только одной точки, принадлежащей секущей плоскости.

Алгоритм построения сечения методов следов:

1. Выяснить имеются ли в одной грани две точки сечения (если да, то через них можно провести сторону сечения).
2. Построить след сечения на плоскости основания многогранника.
3. Найти дополнительную точку сечения на ребре многогранника (продолжить сторону основания той грани, в которой есть точка сечения, до пересечения со следом).
4. Через полученную дополнительную точку на следе и точку сечения в выбранной грани провести прямую, отметить точки пересечения её с рёбрами грани.
5. Выполнить п.1.

Построение сечения четырехугольной пирамиды, заданное точками M, N, K



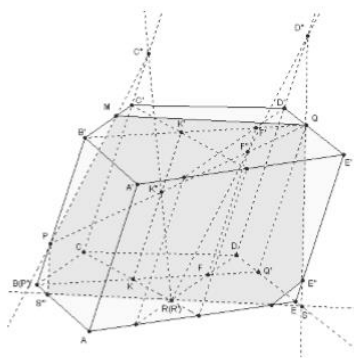
Метод вспомогательных сечений

Метод вспомогательных сечений или еще его называют, метод внутреннего проецирования построения сечений многогранников, является в достаточной мере универсальным. В тех случаях, когда нужный след (или следы) секущей плоскости оказывается за пределами чертежа, этот метод имеет даже определенные преимущества. Вместе с тем следует иметь ввиду, что построения, выполняемые при использовании этого метода, зачастую получаются «скупенными». Тем не менее, в некоторых случаях метод вспомогательных сечений оказывается наиболее рациональным.

Суть метода – найти дополнительные точки секущей плоскости по проекциям ее известных точек на опорную плоскость при выбранном аппарате проецирования.

Алгоритм построения сечения методом внутреннего проектирования:

1. Построить вспомогательные сечения и найти линию их пересечения.
2. Построить след сечения на ребре многогранника.
3. Если точек сечения не хватает для построения самого сечения повторить пп.1-2.



Комбинированный метод

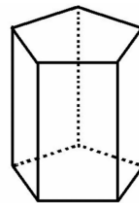
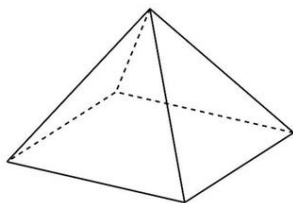
Суть комбинированного метода построения сечений многогранников состоит в применении теорем о параллельности прямых и плоскостей в пространстве в сочетании с аксиоматическим методом.

Контрольные вопросы:

1. Какая фигура называется сечением?
2. Какие виды сечений многогранников вы знаете?
3. При сечении многогранника секущей плоскостью, какая фигура получается в сечении?
4. Сформулируйте основные правила построения сечения.
5. В чем состоит суть метода следов?
6. В чем состоит суть вспомогательного метода?
7. В чем состоит суть комбинированного метода?

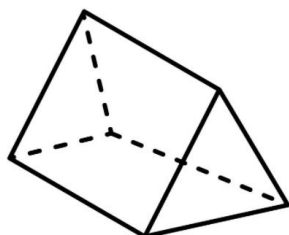
Задания для самостоятельной работы

1. Постройте диагональное сечение многогранников:

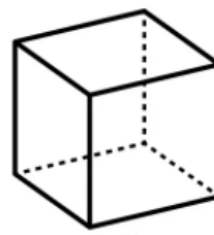


2. Постройте параллельное сечение многогранников:

Сечение плоскостью, параллельной
основанию

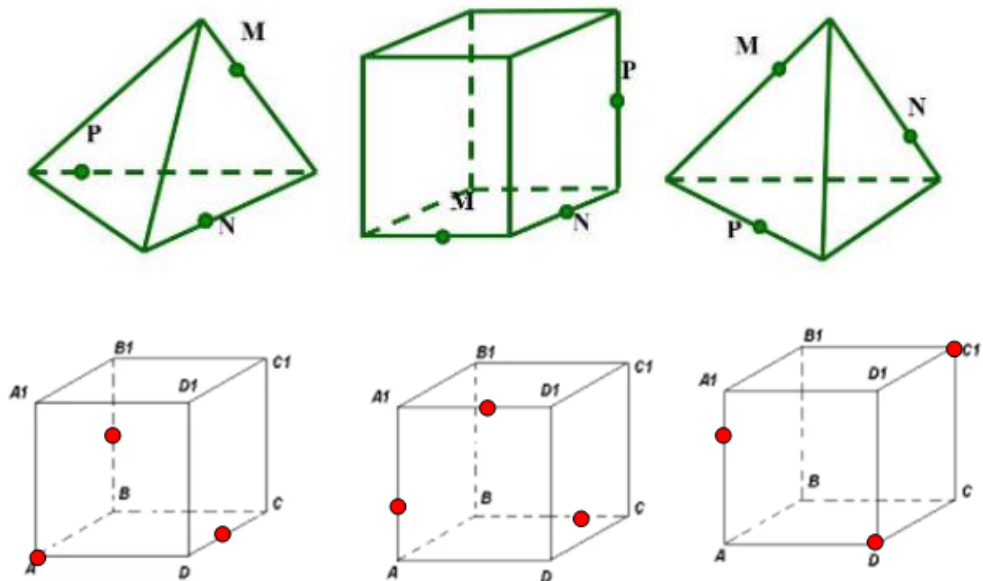


Сечение плоскостью,
параллельной грани боковой

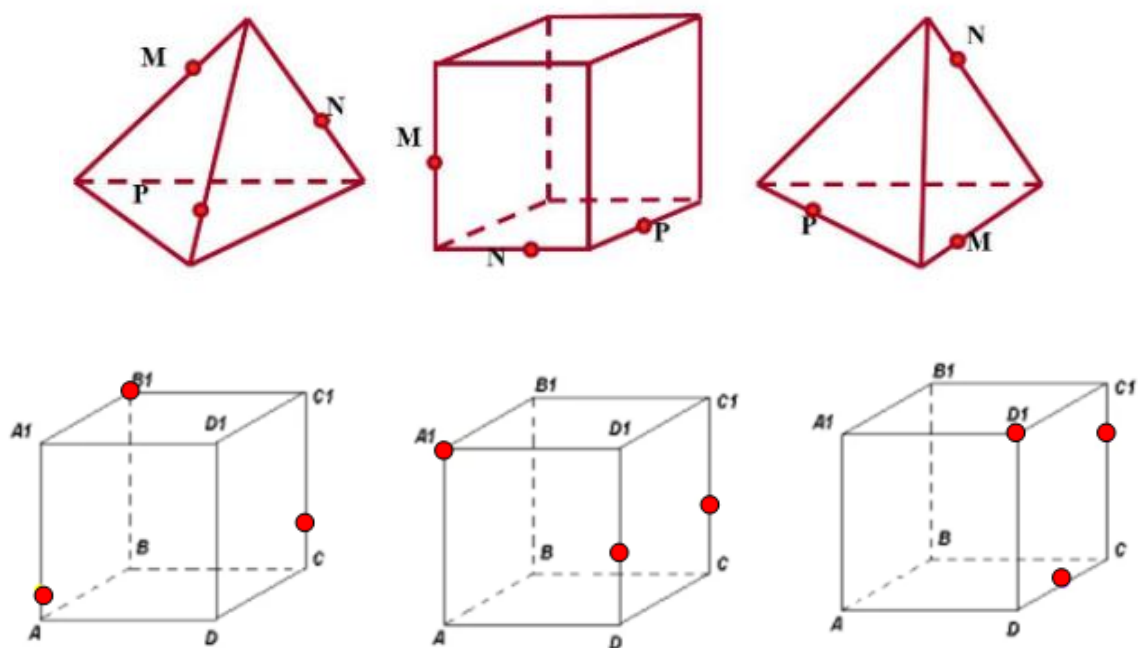


3. Постройте сечение многогранников через указанные точки:

Вариант 1



Вариант 2



РАЗДЕЛ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Значение темы:

«Тела вращения» является одной из важнейших тем не только математики, физики, но и повседневной жизни современного человека. В окружающей нас природе существует множество объектов, являющихся физическими моделями указанной фигуры. Например, многие пробирки, бактерии и вирусы имеют форму цилиндра, конуса и шара или представляют собой некоторое их сочетание, а величественные колонны храмов и соборов, выполненные в форме цилиндров, подчеркивают их гармонию и красоту.

При знакомстве с темой «Тела вращения» развивается пространственное воображение, формируется логическое и критическое мышление, кругозор.

Цели занятия: на основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

- определение цилиндра и его элементов;
- виды сечений цилиндра плоскостями;
- определение конуса;
- виды сечений конуса плоскостями;
- определение шара;
- определение центра шара, сферы, диаметра шара, шарового сектора и сегмента.

уметь:

- различать и показывать на моделях цилиндр;
- изображать цилиндр, осевые сечения цилиндра, выделяя их линейные элементы;
- различать и показывать на моделях конус;
- изображать конус, осевые сечения конуса, выделяя их линейные элементы;
- различать сферу и шар;
- изображать сечения шара плоскостями, выделяя в них соответствующие линейные элементы

Краткое содержание темы

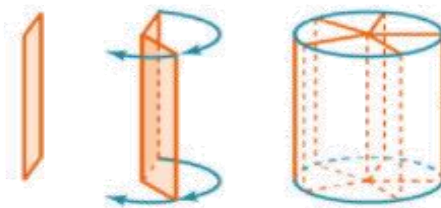
Тела вращения - объёмные тела, возникающие при вращении плоской геометрической фигуры, ограниченной кривой, вокруг оси, лежащей в той же плоскости.

Тела вращения:

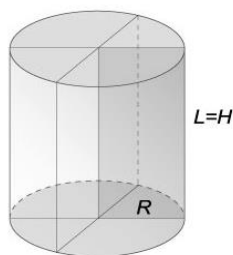
- цилиндр
- конус
- шар

Цилиндр

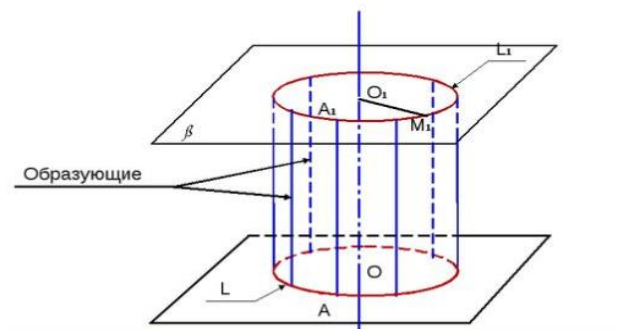
Цилиндр - тело, которое образуется при вращении прямоугольника вокруг прямой, содержащей его сторону.



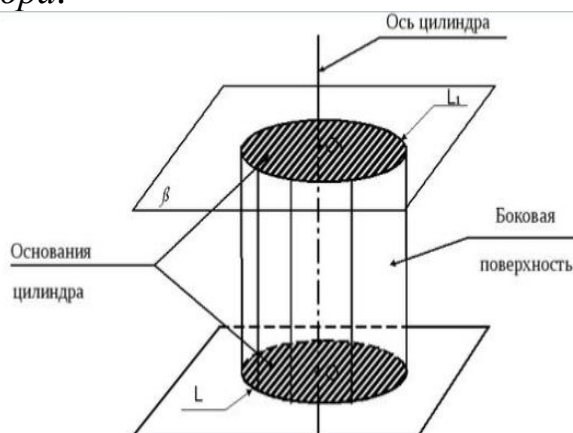
Прямой круговой цилиндр определяется радиусом основания R и образующей L , которая равна высоте цилиндра H .



Цилиндрическая поверхность – это поверхность, образованная прямыми, проходящими через все точки окружности, перпендикулярными плоскости, в которой лежит эта окружность. Эти прямые - образующие цилиндрической поверхности.



Элементы цилиндра:

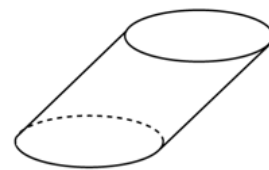
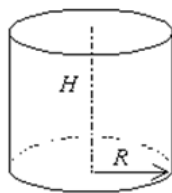


Круги называются *основаниями цилиндра*. *Радиусом* цилиндра называется радиус его основания. Цилиндрическая поверхность называется *боковой поверхностью цилиндра*. Отрезки параллельных прямых,

заключённых между параллельными плоскостями оснований цилиндра, образуют цилиндрическую поверхность и называются *образующими цилиндрической поверхности*. *Высотой* цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований. *Осью* цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Ось цилиндра параллельна образующим.

Цилиндр называется *прямым*, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.

Цилиндр, у которого образующие не перпендикулярны основаниям цилиндра называется *наклонным*

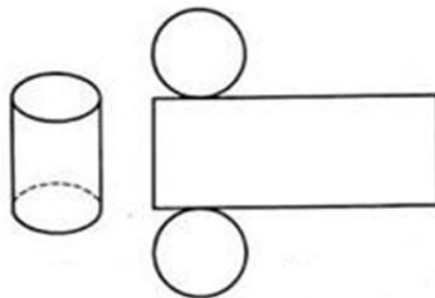


Свойства прямого цилиндра

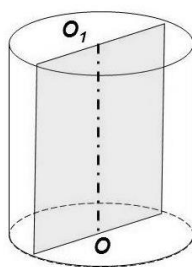
- основания равны и параллельны (из определения)
- образующие равны и параллельны (из свойств параллельного переноса, по свойству параллельных плоскостей)
- в прямом цилиндре: ось = высота = образующая

Развертка цилиндра:

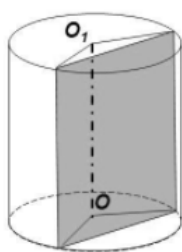
Поверхность цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности. Разверткой цилиндра является прямоугольник и две окружности.



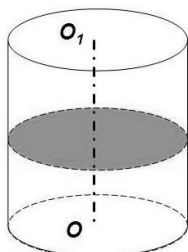
Сечение цилиндра плоскостью



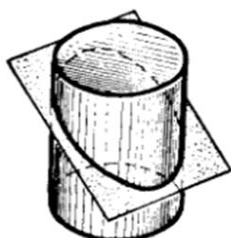
Если секущая плоскость проходит вдоль оси цилиндра, то такое сечение называется *осевым*. Сечением является прямоугольник.



Сечение параллельное оси цилиндра – прямоугольник



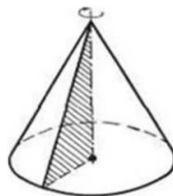
Секущая плоскость перпендикулярна оси цилиндра, то сечение является кругом.



Сечение цилиндра наклонной плоскостью – эллипс

Конус. Усеченный конус

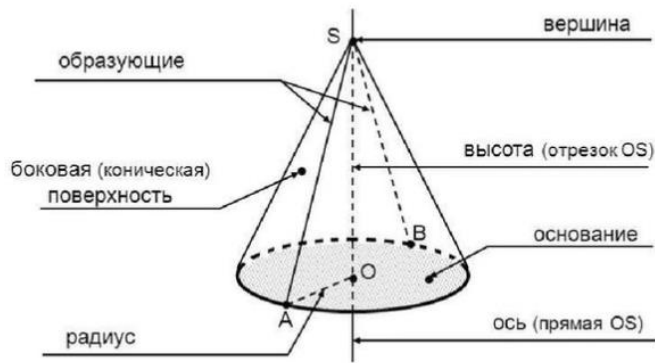
Определение. Конус (прямой круговой конус) - тело, которое образуется при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащий его катет.



Круговой конус - конус, основание которого является кругом.



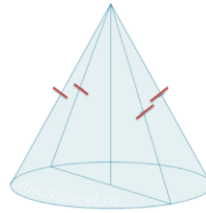
Элементы конуса



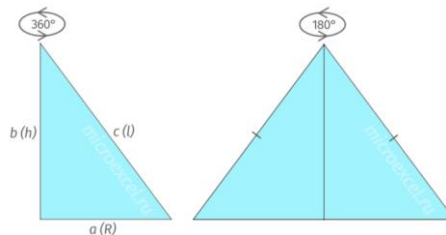
Круг называется *основанием* конуса. Точка, не лежащая в плоскости этого круга называется *вершиной* конуса. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками основания называются *образующими*, конуса. *Высотой* конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. *Осью* конуса называется прямая, соединяющая вершину конуса и центр основания.

Свойства конуса

- 1) все образующие конуса имеют одинаковую длину.



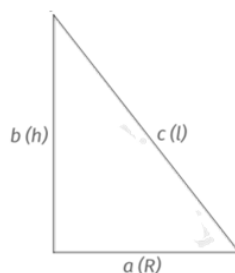
- 2) конус образуется путем вращения прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов на 360° или равнобедренного треугольника (состоит из двух равных прямоугольных треугольников) вокруг своей оси на 180° .



Следствия:

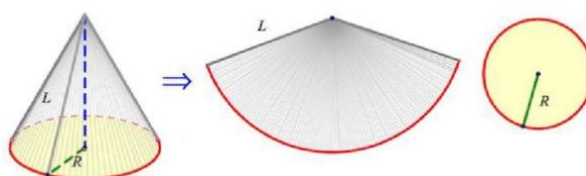
- углы при основании конуса (т.е. между основанием и образующими) равны.
- квадрат образующей конуса (гипотенуза прямоугольного треугольника) равняется сумме квадратов его высоты и радиуса основания (катеты прямоугольного треугольника).

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ или } l^2 = R^2 + h^2$$



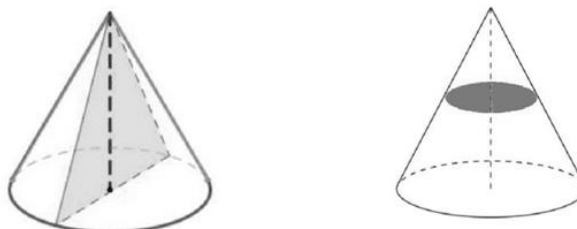
Развертка конуса

Развёрткой боковой поверхности конуса является круговой сектор.



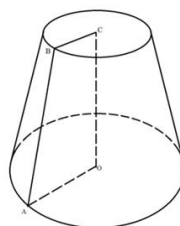
Сечение конуса плоскостью

Сечение конуса плоскостью, который проходит через вершину конуса – это равнобедренный треугольник, боковые стороны этого треугольника являются образующими конуса. Равнобедренным треугольником оказывается и осевое сечение конуса. Это сечение, проходящее через ось конуса. Секущая плоскость параллельна основанию. Сечение-круг. Плоскость, которая параллельна основанию конуса и которая пересекает конус, отсекает от него конус меньшего размера. Оставшаяся часть является усеченным конусом.

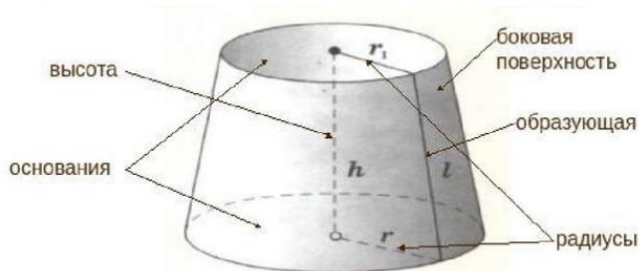


Усеченный конус

Определение. Часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельным плоскости основания, называется усеченным конусом.

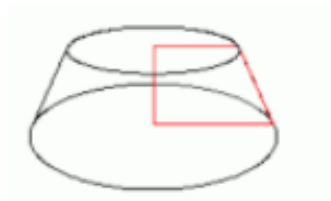


Элементы усеченного конуса



Образующей усеченного конуса называется часть образующей полного конуса, заключенная между основаниями. *Высотой усеченного конуса* называется расстояние между основаниями.

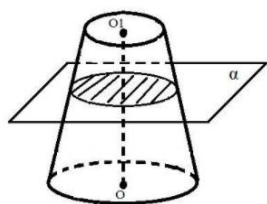
Усеченный конус можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, перпендикулярной основанию.



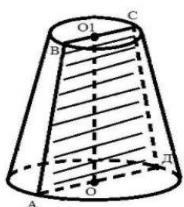
Свойства усеченного конуса

- 1) образующие усеченного конуса равны
- 2) в конусе: ось = высота.
- 3) основания усеченного конуса подобны

Сечение усеченного конуса плоскостью



Секущая плоскость параллельна основанию, сечение-круг.



Осевое сечение усеченного конуса - равнобокая трапеция



Сечение, не проходящее через ось — равнобокая трапеция

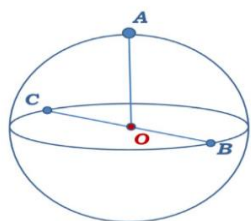
Шар, сфера

Определение. Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки. Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг ее диаметра.

Определение. Тело, ограниченное сферой, называется шар.

Определение. Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется *диаметром*. Концы любого диаметра называются диаметрально противоположными точками шара.

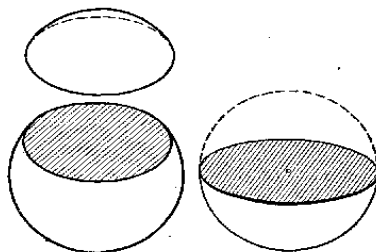
Элементы шара



ОА, ОВ, ОС – радиусы сферы
Точка О – центр сферы
ВС – диаметр

Сечения шара плоскостью

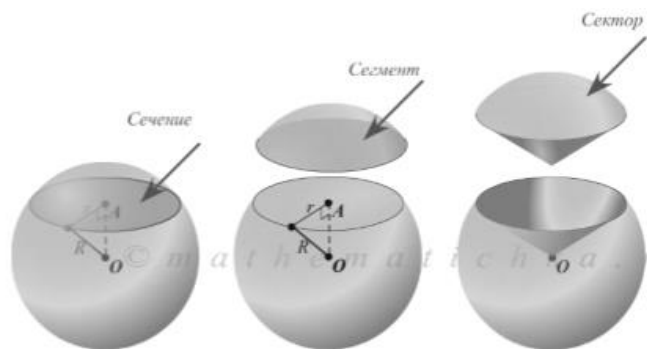
Сечение шара плоскостью всегда имеет форму *круга* сечение, проходящее через центр шара, называется *большим кругом*. Большой круг делит шар на две равные части.



Шаровой сегмент и сектор

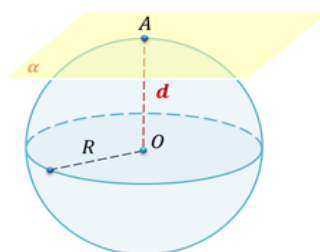
Определение. Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая плоскостью.

Определение. Шаровым сектором называется часть шара, состоящая из шарового сегмента и конуса с вершиной в центре шара и основанием, совпадающим с основанием шарового сегмента.



Касательная плоскость к сфере

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка называется точкой касания плоскости и сферы.



Теорема 1. Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Теорема 2. Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

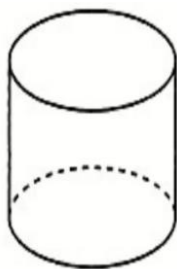
Контрольные вопросы:

1. Дайте понятие телу вращения.
2. Перечислить виды тел вращений
3. Какое тело вращения называется цилиндром?
4. Назовите элементы и свойства цилиндра
5. Какая фигура получается в результате сечения цилиндра?
6. Дайте понятие телу вращения.
7. Перечислить виды тел вращений
8. Какое тело вращения называется конусом?
9. Назовите элементы и свойства конуса.
10. Какое тело называется усеченным конусом?
11. Назовите элементы усеченного конуса
12. Какая фигура получается в результате сечения конуса и усеченного конуса
13. Дайте понятие телу вращения.
14. Перечислить виды тел вращений
15. Какое тело называется сферой?

16. Какое тело называется шаром?
17. Какая фигура получается в результате сечения шара плоскостью?
18. Дайте понятие плоскости, имеющей со сферой только одну общую точку.
19. Каким свойством обладает касательная плоскость к сфере?
20. Дайте понятие шарового сегмента и шарового сектора.

Задания для самостоятельной работы по теме Цилиндр

1. Изобразите основные элементы цилиндра:



1. Ось цилиндра
2. Основания цилиндра
3. Боковая поверхность
4. Высота цилиндра
5. Радиус
6. Диаметр

2. Заполните таблицу

Если секущая плоскость проходит вдоль оси цилиндра, то такое сечение называется осевым.		Секущая плоскость перпендикулярна оси цилиндра	
Сечением является прямоугольник	Сечением является _____	Сечение является кругом	Сечением является _____

3. Заполните таблицу. Выделите цветным карандашом указанный элемент цилиндра, введите обозначения и запишите ответ:

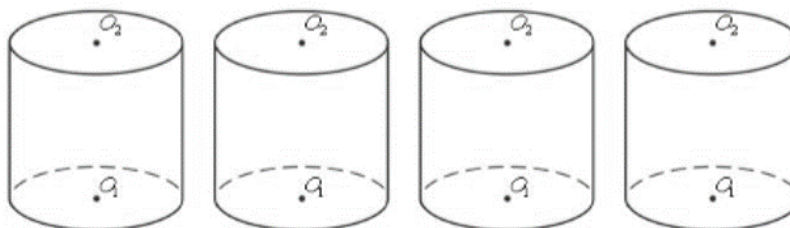


Рис. 1

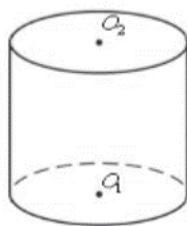
Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Рис.1	Основание цилиндра – <i>синими цветом</i> . <i>Ответ:</i> основанием цилиндра является ... с центром ...
Рис.2	Образующую цилиндра – <i>красным цветом</i>
Рис.3	Ось цилиндра – <i>зеленым цветом</i>
Рис.4	Радиус нижнего основания – <i>черным цветом</i> , диаметр верхнего основания – <i>желтым цветом</i>

4. Постройте высоту цилиндра и сформулируйте определение. Запишите обозначение.



Решите задачи:

Задача 1. В прямом цилиндре радиус основания 3 см, высота 8 см. Найти длину отрезка по диагонали цилиндра.

Задача 2. В прямом цилиндре высота 7 см, радиус основания 5 см. Сечение проходит параллельно оси цилиндра на расстоянии 3 см. Найти площадь сечения.

Задача 3. В прямом цилиндре высота 12 см, радиус основания 10 см, сечение проходит параллельно оси цилиндра и образует квадрат. Найти на каком расстоянии проходит сечение от оси цилиндра.

Задача 4. В прямом круговом цилиндре радиус основания 13 см., на расстоянии 5 см от оси цилиндра проходит сечение цилиндра. Известно, что в сечении диагональ образует угол 45 градусов. Найти высоту призмы

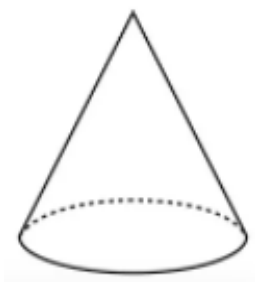
Задача 5. В прямом круговом цилиндре диагональ цилиндра равна 4 см и образует угол 30 градусов с основанием. Найти образующую и радиус цилиндра.

Задача 6. В прямом круговом цилиндре образующая равна 8 м, радиус основания 5 м, сечение проходит от оси цилиндра на расстоянии 3 м. Найти площадь сечения.

Задача 7. Высота цилиндра 10 см, радиус 5 см. Найдите площадь сечения, параллельного оси цилиндра и находящегося на расстоянии 3 см от нее.

Задания для самостоятельной работы по теме Конус

1. Изобразите основные элементы конуса, дайте наименование конусам:



1. Ось конуса
2. Основание
3. Боковая поверхность
4. Высота
5. Радиус
6. Диаметр
7. Вершина

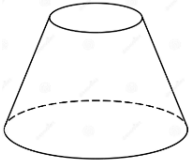
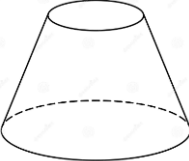


2. Заполните таблицу

плоскость параллельна основанию	осевое сечение конуса	плоскость не параллельна основанию	сечение конуса плоскостью, проходящую через вершину и хорду основания
Сечение - <i>круг</i>	Сечение -	Сечение -	Сечение -

3. Ответьте на вопросы, используя рисунок:

	Укажите основания усеченного конуса (обозначьте центр круга). <i>Ответ:</i> основаниями усеченного конуса является круг с центром ... и круг с центром ...
	Проведите на рисунке и обозначьте две образующие конуса. <i>Ответ:</i> отрезки ... и являются образующими усеченного конуса.
	Укажите и обозначьте ось усеченного конуса. <i>Ответ:</i> осью усеченного конуса является прямая

	Укажите высоту конуса. <i>Ответ:</i> отрезок ... является высотой конуса.
	При вращении какой фигуры можно получить усеченный конус? <i>Ответ:</i> при вращении ... Изобразите эту фигуру на рисунке

Реши задачи

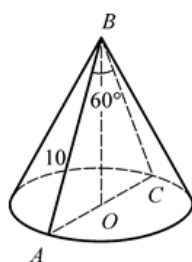
Задача 1.

Высота конуса равна 15 см, радиус основания равен 8 см. Найдите образующую конуса.

Задача 2.

В прямом круговом конусе образующая 13 см, радиус основания 5 см. Найдите высоту конуса.

Задача 3.



В прямом круговом конусе образующая 10 см, угол при вершине 60 градусов. Найдите высоту.

Задача 4.

В прямом круговом конусе радиус 5 см, высота конуса 12 см. Найдите образующую конуса.

Задача 5.

В прямом круговом конусе радиус основания 10 см, образующая 12 см. От центра окружности проходит сечение. Найдите расстояние от центра окружности до сечения.

Задача 6.

Высота конуса равна 15 см, а диаметр основания – 16 см. Найдите образующую конуса.

Задача 7.

Радиус основания конуса равен 2 дм. Осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник. Найдите площадь сечения.

Задача 8.

Образующая конуса равна 16 см и наклонена к плоскости основания под углом 30° . Найдите высоту.

Задача 9.

Радиусы оснований усеченного конуса 3 м и 6 м, высота 4м. Найдите образующую.

Задача 10.

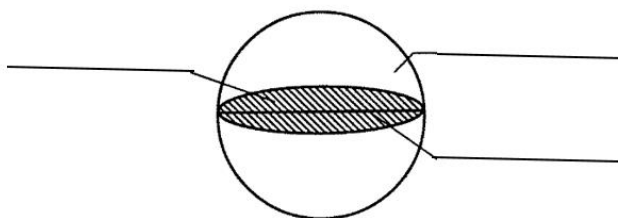
Радиусы оснований усеченного конуса равны 14 см и 7 см, образующая наклонена к основанию под углом 45° . Найдите высоту.

Задача 11.

Радиусы оснований усеченного конуса 3 м и 7 м, образующая 5 м. Найдите площадь осевого сечения.

Задания для самостоятельной работы по теме Шар

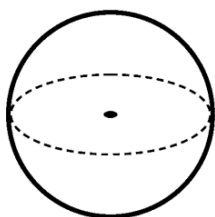
1. Укажите элементы шара:



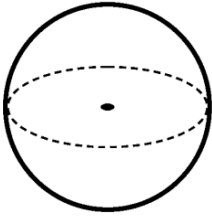
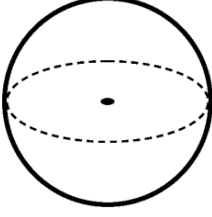
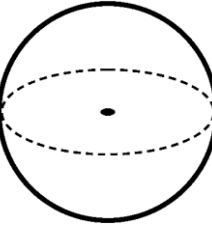
2. Заполните таблицу:

Сечение шара диаметральной плоскостью	
Сечение - <i>круг</i>	Сечение -

3. Ответьте на вопросы, используя рисунок:



Укажите и обозначьте точку- красным цветом, которая является центром шара
Ответ: ... - центр шара

	Обозначьте и укажите радиус шара -<i>синим цветом</i>. <i>Ответ:</i> Отрезок ... является радиусом шара
	Обозначьте и укажите диаметр шара -<i>зеленым цветом</i>. <i>Ответ:</i> Отрезок является диаметром шара
	Постройте и обозначьте сечение шара от центра на расстоянии 1 см - <i>желтым цветом</i>. Радиус сечения шара - <i>черным цветом</i>. Радиус шара – <i>красным цветом</i>. Отрезок является радиусом сечения (R_c) Отрезок ... является радиусом шара ($R_{ш}$) Точка ... является центром сечения. <i>Вопрос:</i> $R_c = R_{ш}$? <i>Ответ:</i> ...

Реши задачи

Задача 1.

Шар радиуса 17 см пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 8 см от центра. Найдите площадь сечения.

Задача 2.

Точки А и В лежат на сфере с центром $O \notin AB$, а точка М лежит на отрезке АВ. Докажите, если М – середина отрезка АВ, то $OM \perp AB$.

Задача 3.

Радиус шара равен 6 см. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60° к нему. Найдите площадь сечения.

Задачи по теме «Многогранники» и «Тела вращения»

Значение темы:

Тема «Решение задач по разделам «Многогранники», «Тела и поверхности вращения»» направлена на обобщение и систематизацию знаний, использования свойств многогранников и тел вращения при решении стереометрических задач. Данная тема является основой для подготовки к зачетному занятию.

Цели занятия: на основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

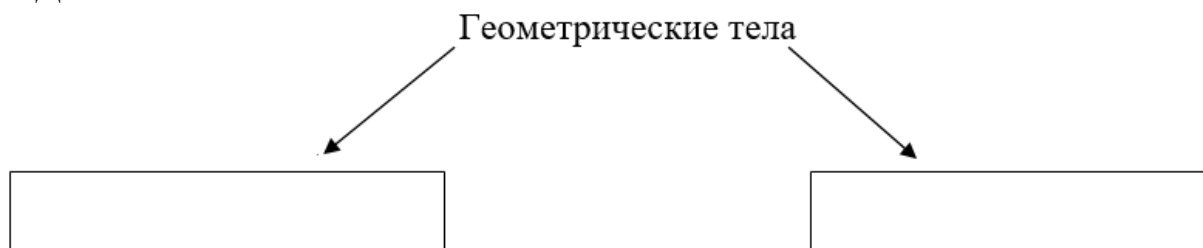
- определение призмы и пирамиды, их элементов;
- определение тел вращения, их элементов.

уметь:

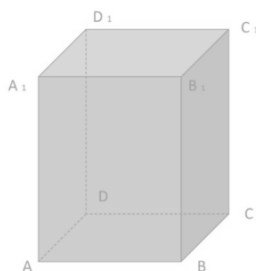
- использовать определения и свойства многогранников и тел вращения при решении стереометрических задач.

Задачи для самостоятельной работы

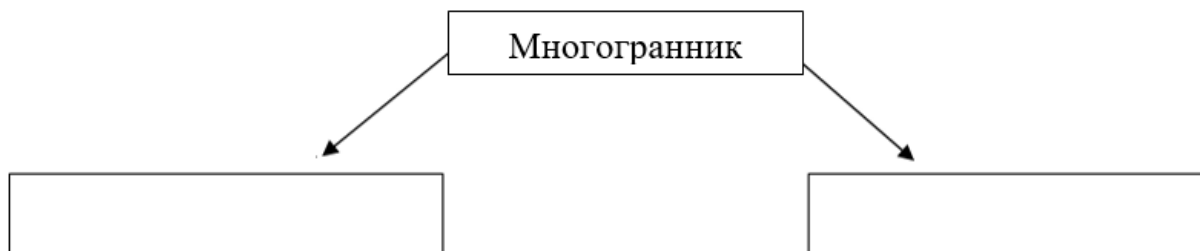
1. Дополните:



2. По рисунку дайте наименование телу. Перечислите основные элементы

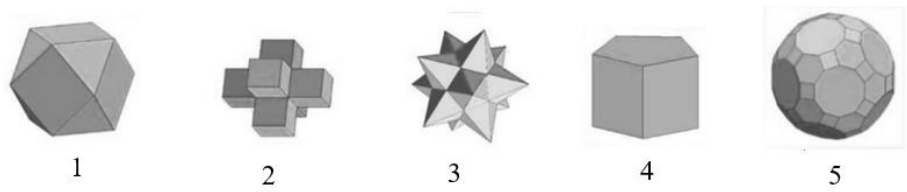


3. Дополните и из представленных тел распределите соответственно:



Ответ: ...

Ответ: ...



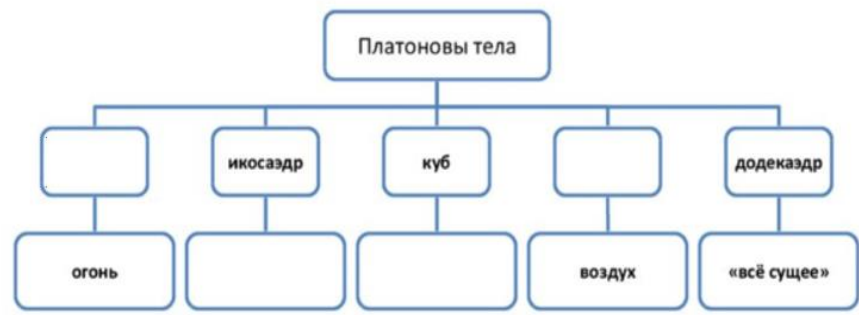
4. Ответьте на вопросы:

- какой многогранник называется правильным?
- как называют правильные многогранники?

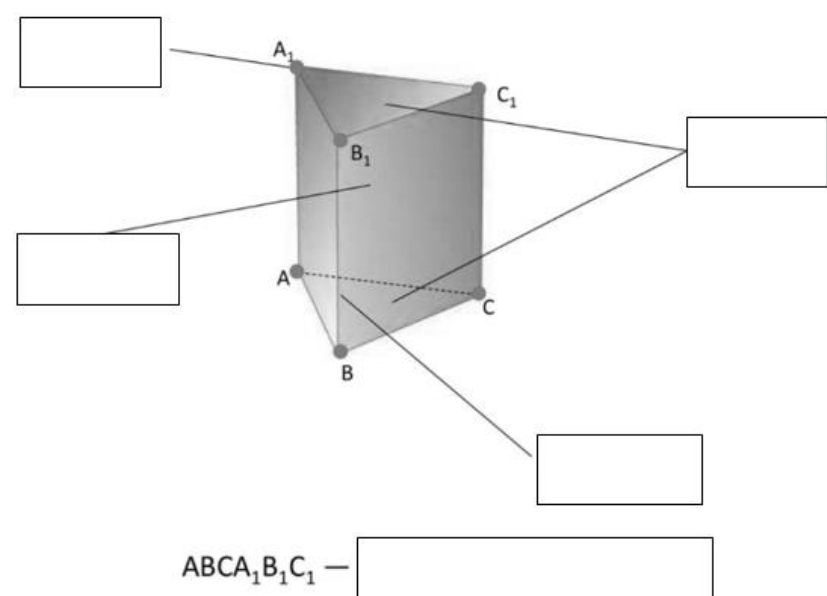
5. Соедините наименования тела соответственно:



5. Заполните схему



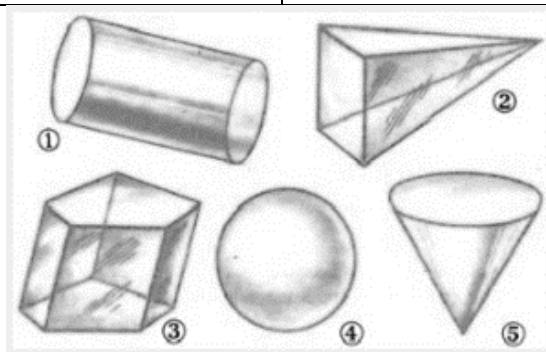
6. Нарисуйте призму и запишите основные элементы



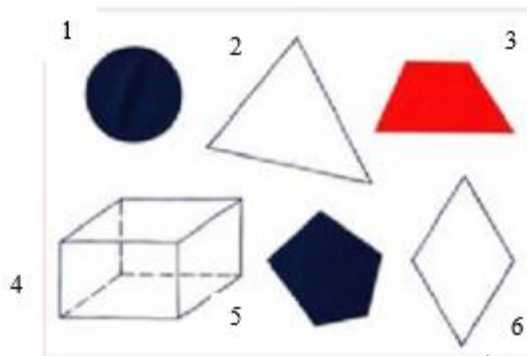
7. Постройте высоту в треугольной пирамиде и обозначьте– красный цвет, апофема – синий цвет

8. На рисунке изображены различные геометрические тела. В таблице распределите номера соответственно:

Многогранники	Тела вращения

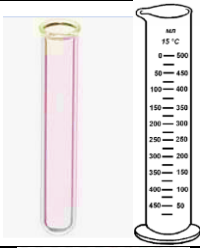


9. Найдите на рисунке лишний элемент. Объясните свой ответ.

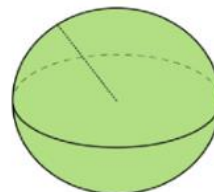
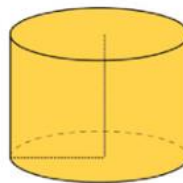
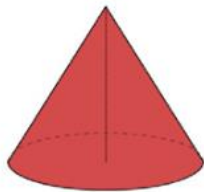


10. Заполните таблицу. В столбце втором «Тело» изобразите геометрическое тело (пример 4), в последнем столбце – фигура, при вращении, которой образуется тело в столбце 2.

№	Тело	При вращении какой фигуры ?
1.		
2.		
3.		
4.	<i>пример</i> 	<i>Цилиндр – при вращении прямоугольника</i>

5.		
6.		
7.		
8.		

11. Поставьте в соответствии изображенное геометрическое тело и наименование:

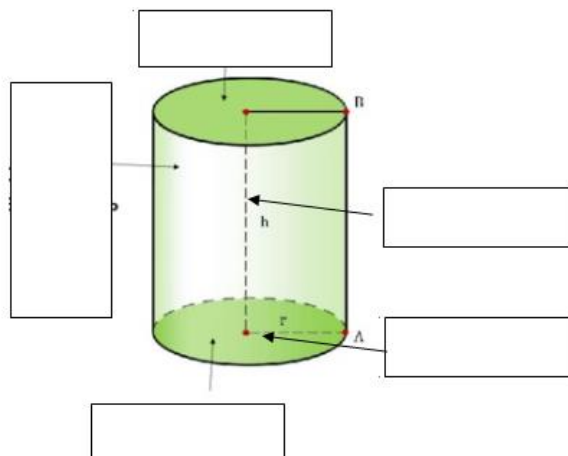


шар

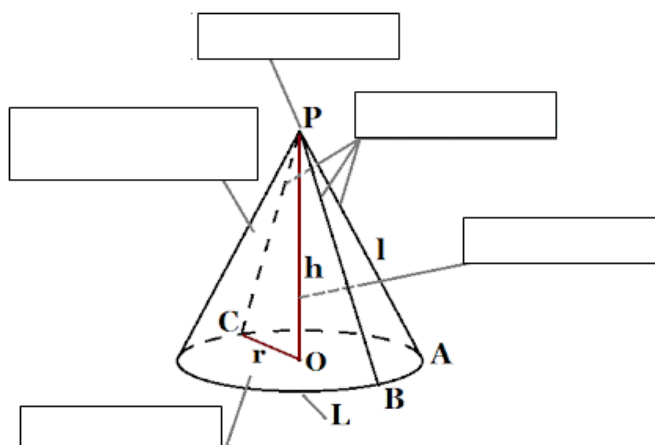
цилиндр

конус

12. Изобразите цилиндр и обозначьте основные элементы тел вращения, дайте наименование.



13. Изобразите конус и обозначьте основные элементы тел вращения, дайте наименование.



Решите задачи

Задача 1.

Расстояние от точки М до каждой из вершин правильного треугольника ABC равно 4 см. Найдите расстояние от точки М до плоскости ABC, если $AB=6$ см.

Задача 2.

Шар, радиус которого 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения.

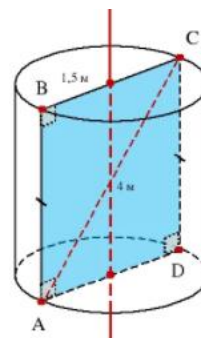
Задача 3. Решить задачу, используя рисунок

ABCD - осевое сечение. AB, CD-образующие,

$R=1,5$ см, $H=4$ см.

Найти: AC-?

Доказать: ABCD - прямоугольник



Задача 4.

В конусе высота 30 см, образующая 34 см. Найти диаметр основания конуса

Задача 5.

В прямоугольном параллелепипеде известно, что $BB_1=12$ см, $A_1B_1=21$ см, $AD=16$ см. Найдите длину диагонали параллелепипеда

Задача 6.

В правильной четырехугольной пирамиде расстояние от вершины до основания равно 8 см, диагональ основания равна 30 см. Найдите боковое ребро.

Объемы геометрических тел

Значение темы:

Первые ощущения объема мы получаем, когда берем в руки и ощупываем предметы или занимаемся лепкой. Форму объекта характеризуют длина, ширина и высота. Именно эти измерения делают его объемным.

Специалисты различных профессий сталкиваются с необходимостью вычислению объема геометрических фигур.

При знакомстве с темой «Объемы геометрических тел» развивается пространственное воображение, формируется логическое и критическое мышление, кругозор.

Цели занятия: на основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

- формулы объема многогранников и тел вращения

уметь:

- решение стереометрических задач на нахождение объемов многогранников и тел вращения

Краткое содержание темы

Определение. Часть пространства, занимаемого геометрическим телом, называется объемом этого тела.

Объём принято измерять в единицах измерения объёма (единицах измерения размера пространства, занимаемого телом), то есть в кубических метрах, сантиметрах, миллиметрах и так далее. За единицу измерения объёма принимают куб с ребром 1 см, то есть, кубический сантиметр (обозначение: см^3). По аналогии, можно за единицу измерения объёма принять кубический миллиметр (1 мм^3), кубический метр (1 м^3) и тому подобное.

Объём выражается в положительных числах. Это число показывает, сколько единиц измерения содержится в теле. Например, сколько кубических миллиметров в аквариуме, сколько кубических метров в бассейне и так далее.

Объём обозначается заглавной латинской буквой V.

Свойства объёмов

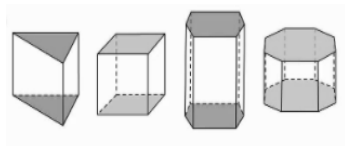
- 1) равные тела имеют равные объёмы
- 2) если тело разбито на части, являющиеся простыми телами, то объем этого тела равен сумме объемов его частей
- 3) объем куба, ребро которого равно единицы длины, равен единице.

Единицей измерения объема служит объем кубика со стороной равной единицей измерения длины (метр дециметр сантиметр и т.д.) Соответствующая единица измерения называется кубический метр и т.д. Для

измерения объемов жидкости единицей измерения служит литр, равный одному кубическому дециметру.

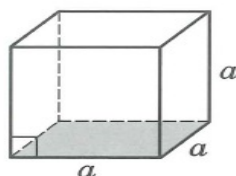
Формулы объемов многогранников

Призма



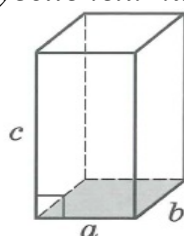
$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

Куб



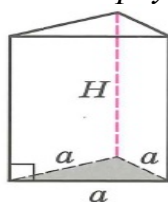
$$V = a^3$$

Прямоугольный параллелепипед



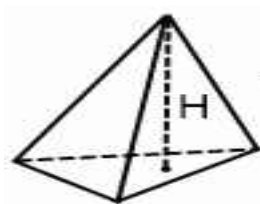
$$V = abc$$

Правильная треугольная призма



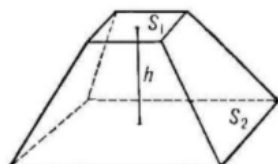
$$V = \frac{a^2}{4} H \sqrt{3}$$

Пирамида



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$$

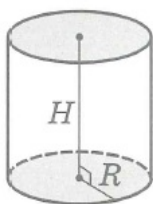
Объем усеченной пирамиды



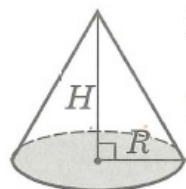
$$V = \frac{1}{3} h (S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$$

где H-высота S1 и S2 – площади нижнего и верхнего оснований

Формулы объемов тел вращения

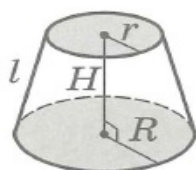


Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту: $V = \pi R^2 H$, где R , H - радиус и высота цилиндра соответственно

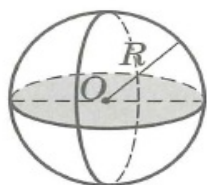


Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту, где R - радиус основания конуса, H - высота.

$$V = \frac{\pi}{3} R^2 H$$



$$V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2)$$



$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение объема геометрического тела.
2. Поясните, как определить объем многогранников?
3. Поясните, как определить объем тел вращения?

Задания для самостоятельной работы

Задача 1.

Диагональ куба равна $\sqrt{12}$. Найдите его объем.

Задача 2.

Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 7 см, боковое ребро равно 4 см. Найдите объем призмы.

Задача 3.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковое ребро равно 39 см, сторона основания равна $15\sqrt{2}$ см. Найдите объем пирамиды.

Задача 4.

В цилиндрический сосуд налили 1200 см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 10 см. Чему равен объем детали?

Задача 5.

Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника ABC вокруг катета, равного 6 см. Найдите его объем.

Задача 6.

Купили футбольный мяч в спущенном состоянии. Найдите объем этого мяча, если сказано, что в накаченном состоянии этот мяч имеет диаметр 30 см.

Задача 7.

Деталь в форме параллелепипеда имеет размеры: 25, 16, 6 см и массу 3,5 кг. Найдите плотность детали, используя формулу: $\rho = \frac{m}{V}$.

Задача 8.

Резервуар с водой 10 м^3 имеет форму параллелепипеда с размерами 2,5 м и 1,75 м. Найдите высоту резервуара.

Задача 9.

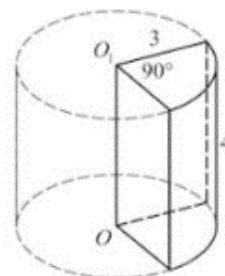
Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 5 и 6 см. Ее объем равен 40 см^3 . Найдите высоту этой пирамиды.

Задача 10.

Найдите объем конуса, образующая которого равна 12 см и наклонена к плоскости основания под углом 30° .

Задача 11.

Найдите объем части цилиндра, изображенной на рисунке.



Площади поверхностей

Значение темы:

Вычисление площадей поверхностей пирамид, призм, цилиндров – задача более сложная, но стереометрия (геометрия трехмерного пространства) позволяет решить и ее. Боковые поверхности некоторых из этих тел (цилиндра, призмы, пирамиды и конуса) можно развернуть на плоскость, а других (сферы) – нельзя. При заданном объеме минимальной площадью поверхности обладает сфера. При заданном объеме минимальной площадью поверхности обладает сфера. (Мыльный пузырь в свободном пространстве принимает форму сферы.) Сферическая оболочка оказывает наибольшее сопротивление внутреннему давлению. Сферические емкости применяются для хранения жидкостей и газов под давлением и при низких температурах, так как при минимальной поверхности приток тепла извне сводится к минимуму. Самая экономичная форма, у шара самая малая поверхность, при самом большом объеме на его оболочку уходит меньше материала, чем на любую другую.

Со всеми этими знаниями вы познакомитесь более подробно при знакомстве с темой «Площади поверхностей», которая также способствует развитию пространственного воображения, формированию логического и критического мышления, кругозора.

Цели занятия: на основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

- формулы площадей поверхности тел вращения

уметь:

- решение стереометрических задач на нахождение площадей поверхности

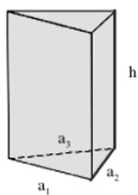
Краткое содержание темы

Различают два вида площадей поверхности тел:

$S_{бок}$ - площадь боковой поверхности тела – сумма площадей всех граней,

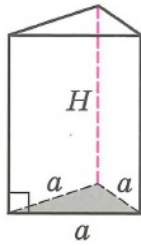
$S_{полн}$ - площадь полной поверхности тела, которая равна сумме площадей боковой поверхности и основания тела.

Призма



$$S_{бок} = P_{осн} h$$

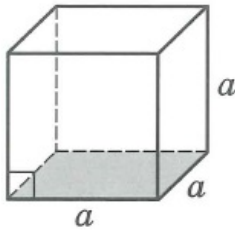
$$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$$



Правильная треугольная призма

$$S_{\text{бок}} = 3aH$$

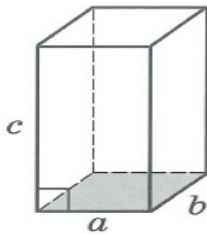
$$S_{\text{полн}} = \frac{a}{2}(a\sqrt{3} + 6H)$$



Куб

$$S_{\text{бок}} = 4a^2$$

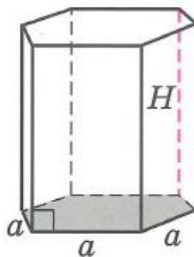
$$S_{\text{полн}} = 6a^2$$



Прямоугольный параллелепипед

$$S_{\text{бок}} = 2(ac + bc)$$

$$S_{\text{полн}} = 2(ac + ab + bc)$$



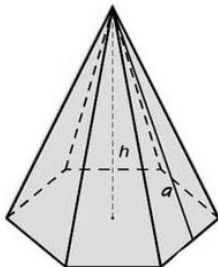
Правильная шестиугольная призма

$$S_{\text{бок}} = 6aH$$

$$S_{\text{полн}} = 3a(a\sqrt{3} + 2H)$$

Пирамида

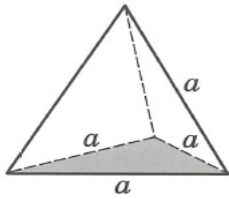
Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.



$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}Pa$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$$

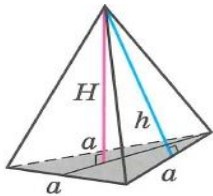
Тетраэдр



$$S_{\text{бок}} = \frac{3a^2}{4} \sqrt{3}$$

$$S_{\text{полн}} = a^2 \sqrt{3}$$

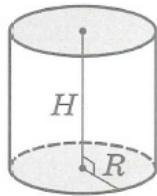
Правильная треугольная пирамида



$$S_{\text{бок}} = \frac{3}{2} ah$$

$$S_{\text{полн}} = \frac{a}{4} (a\sqrt{3} + 6H)$$

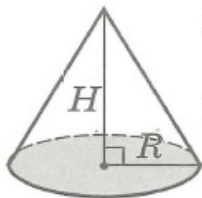
Цилиндр



$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH$$

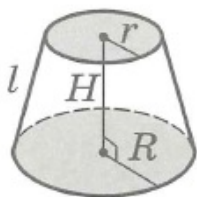
$$S_{\text{полн}} = 2\pi R(R + H)$$

Конус



$$S_{\text{бок}} = \pi R \sqrt{R^2 + H^2}$$

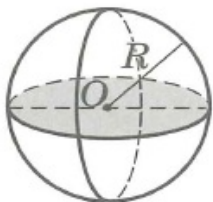
$$S_{\text{полн}} = \pi R (R + \sqrt{R^2 + H^2})$$



$$l = \sqrt{(R - r)^2 + H^2}$$

$$S_{\text{бок}} = \pi l (R + r)$$

$$S_{\text{полн}} = \pi [R^2 + r^2 + l(R + r)]$$



$$S_{\text{полн}} = 4\pi R^2$$

Отношение площадей поверхностей и объемов подобных тел

Теорема. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Теорема. Отношение объемов подобных тел равно кубу коэффициента подобия. (Объемы двух подобных тел относятся как кубы их линейных размеров.)

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение площади поверхности.
2. Поясните, как определить площадь поверхности?
3. Поясните, как определить площадь поверхности?
4. Каким образом соотносятся между собой площади поверхностей и объемы подобных тел?

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1.

Площадь поверхности куба равна 2400 м^2 . Найдите его диагональ.

Задача 2.

Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48 см. Угол между этой диагональю и образующей цилиндра равен 60° . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Задача 3.

Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 42 см, боковые ребра равны 75 см. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

Задача 4.

Длина окружности основания цилиндра равна 5 см, высота равна 2 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Задача 5.

Объем шара равен 12348π . Найдите площадь его поверхности.

Задача 6.

Объем куба равен 8 см^3 . Найдите площадь его поверхности.

Задача 7.

Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 см, высота призмы равна 10 см. Найдите площадь ее поверхности.

Задача 8.

Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 60 м, боковые ребра равны 78 м. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

Задача 9.

Площадь осевого сечения цилиндра равна 23 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Задача 10.

Длина окружности основания конуса равна 6 м, образующая равна 8 м. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Самостоятельная работа

Вариант 1

Задача 1.

Объем куба равен 125 см^3 . Найдите площадь его поверхности.

Задача 2.

Аквариум имеет форму куба со стороной 40 см. Сколько литров составляет объём аквариума? В одном литре 1000 кубических сантиметров.

Задача 3.

Радиус основания цилиндра равен 2 см, высота равна 3 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Задача 4.

Площадь поверхности шара равна 12 м^2 . Найдите площадь большого круга шара.

Задача 5.

Длина окружности основания конуса равна 8 см, образующая равна 3 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Вариант 2

Задача 1.

Объем куба равен 27 см^3 . Найдите площадь его поверхности.

Задача 2.

Аквариум имеет форму куба со стороной 20 см. Сколько литров составляет объём аквариума? В одном литре 1000 кубических сантиметров.

Задача 3.

Радиус основания цилиндра равен 7 см, высота равна 10 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Задача 4.

Площадь поверхности шара равна 8 м^2 . Найдите площадь большого круга шара.

Задача 5.

Длина окружности основания конуса равна 12 см, образующая равна 5 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Координаты пространства

Значение темы:

Общаясь друг с другом, люди часто говорят: "Оставьте свои координаты". Для чего?...Чтобы человека было легко найти. Это могут быть: номер телефона, домашний адрес, место работы, E-mail. Суть координат или системы координат состоит в том, что это правило, по которому определяется положение объекта. Системы координат окружают нас повсюду: система географических координат (широта - параллели и долгота - меридианы); при астрономических наблюдениях координатная сетка накладывается на небесный свод с Землей в центре. Векторы в биологии называется организм, переносящий паразита от одного организма-хозяина к другому. Например, вши переносят возбудителей сыпного тифа, крысы – чумы. Вектор в генетике — молекула нуклеиновой кислоты, чаще всего ДНК, используемая в генетической инженерии для передачи генетического материала другой клетке.

Цели занятия: на основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

- формула нахождения расстояния между точками через их координаты;
- формула нахождения координат середины отрезка;

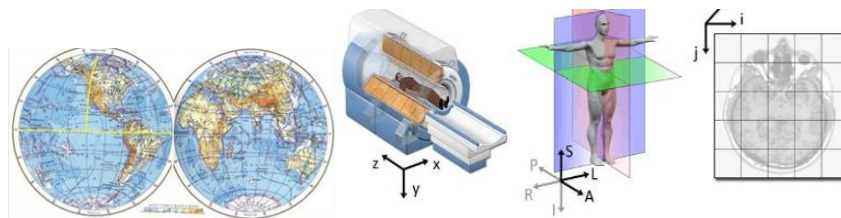
уметь:

- находить расстояние между точками и координаты середины отрезка;
- изображать точки в декартовой системе координат;
- использовать координаты при решении математических и прикладных задач.

Краткое содержание темы

Понятие декартовой системы координат

Если вы находитесь в некоторой нулевой точке и размышляете над тем, сколько единиц расстояния нужно пройти строго вперёд, а затем - строго вправо, чтобы оказаться в некоторой другой точке, то вы уже пользуетесь прямоугольной декартовой системой координат на плоскости. А если точка находится выше плоскости, на которой вы стоите, и к вашим расчётам добавляется подъём к точке по лестнице строго вверх также на определённое число единиц расстояния, то вы уже пользуетесь прямоугольной декартовой системой координат в пространстве.



Упорядоченная система двух или трёх пересекающихся перпендикулярных друг другу осей с общим началом отсчёта (началом координат) и общей единицей длины называется *прямоугольной декартовой системой координат*.

С именем французского математика Рене Декарта (1596-1662гг) связывают прежде всего такую систему координат, в которой на всех осях отсчитывается общая единица длины и оси являются прямыми. Помимо прямоугольной существует общая декартова система координат (аффинная система координат). Она может включать и не обязательно перпендикулярные оси. Если же оси перпендикулярны, то система координат является прямоугольной.

Прямоугольная декартова система координат на плоскости имеет две оси, а прямоугольная декартова система координат *в пространстве* - *три оси*. Каждая точка на плоскости или в пространстве определяется упорядоченным набором координат - чисел в соответствии единице длины системы координат.

Существует декартова система координат и на прямой, то есть в одном измерении. Введение декартовых координат на прямой представляет собой один из способов, с помощью которого любой точке прямой ставится в соответствие вполне определённое вещественное число, то есть координата.

Метод координат, возникший в работах Рене Декарта, ознаменовал собой революционную перестройку всей математики. Появилась возможность истолковывать алгебраические уравнения (или неравенства) в виде геометрических образов (графиков) и, наоборот, искать решение геометрических задач с помощью аналитических формул, систем уравнений.

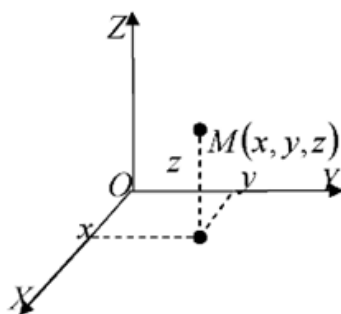
Координатный метод описания геометрических объектов положил начало аналитической геометрии.

Определение. Осью называется прямая, на которой:

- выбрана начальная точка («начало» - точка O);
- указано (стрелкой) положительное направление отсчета;
- выбран масштаб.

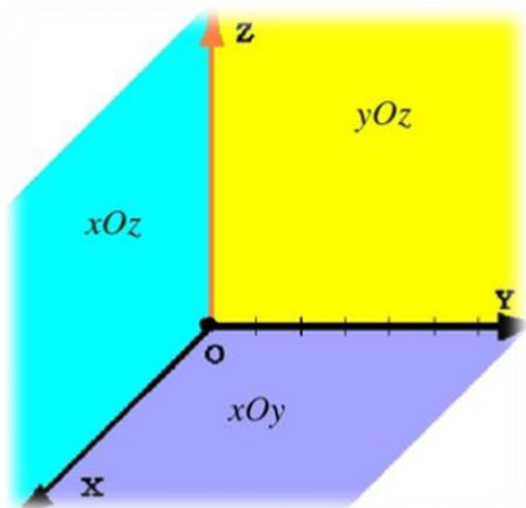
Определение. Декартовой прямоугольной системой координат на в пространстве называют три взаимно перпендикулярные оси с общим началом. Первая ось OX называется осью *абсцисс*, вторая ось OY - осью *ординат* (третья ось OZ - осью *аппликат*).

Каждой точке пространства ставится в соответствие упорядоченная тройка действительных чисел - координат данной точки (x, y, z) - координаты точки M .



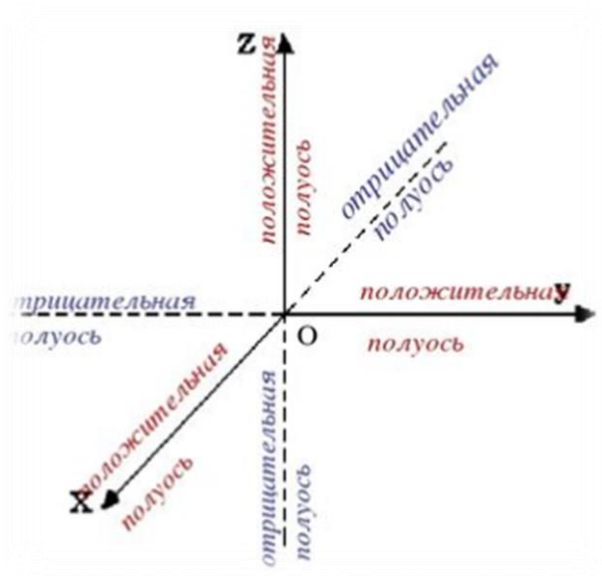
Положение любой точки в пространстве определяется тремя координатами. Каждая координата - ортогональная проекция точки на координатную плоскость.

Три плоскости, проходящие через оси координат Ox и Oy , Oy и Oz , Oz и Ox , называются координатными плоскостями: Oxy , Oyz , Ozx .



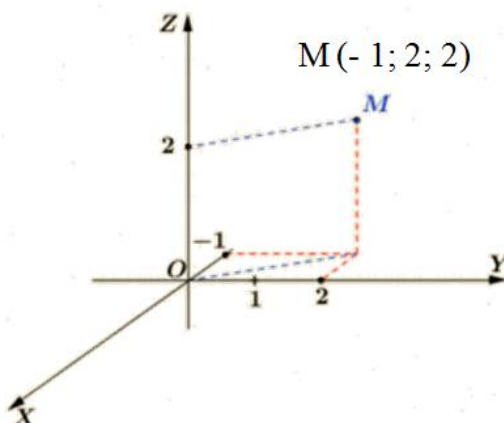
Лучи, направление которых совпадает с направлением оси, называют *положительными полуосями*, а оставшиеся лучи - *отрицательными полуосями*.

Каждая ось делится точкой O на два луча.



Построение точки

Определяет точку в пространстве при помощи трех чисел: x , y , z . Каждое число соответствует длине кратчайшего отрезка, проложенного параллельно одноименной оси координат до плоскости, образованной другими осями координат. Длина берется со знаком минус, если точка находится со стороны отрицательных значений шкалы координат.



Формула нахождения расстояния между точками через их координаты

Пусть даны т. $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

Расстоянием между точками называется число, найденное по формуле:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - x_1)^2}$$

Пример. Найдите расстояние между точками $A(1; 1; 2)$, $B(1; 1; 3)$

$$AB = \sqrt{(1 - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Формула нахождения координат середины отрезка

Координаты середины отрезка выражаются через координаты его концов по формулам:

$$X = \frac{X_1 + X_2}{2} ; Y = \frac{Y_1 + Y_2}{2} ; Z = \frac{Z_1 + Z_2}{2},$$

где $A_1 (x_1, y_1, z_1)$, $A_2 (x_2, y_2, z_2)$, $C (x, y, z)$ – середина

Пример. Найти координаты точки $C (x; y; z)$ - середины отрезка AB заданного точками $A(-1, 3, 1)$ и $B(6, 5, -3)$.

$$x = \frac{-1+6}{2} = 2,5 \qquad y = \frac{3+5}{2} = 4 \qquad z = \frac{1-3}{2} = -1$$

Ответ: $C (2,5; 4; -1)$

Уравнения прямой и сферы

Уравнение прямой, проходящей через две заданные несовпадающие точки $A_1 (x_1, y_1, z_1)$, $A_2 (x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

В декартовой системе координат уравнение сферы радиуса R с центром $C (x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

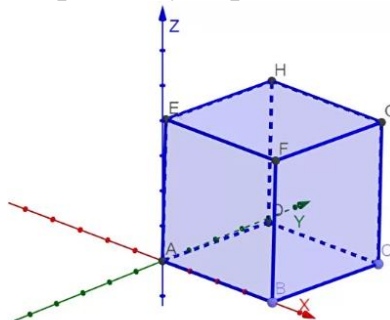
Контрольные вопросы:

1. Дайте определение всем составляющим декартовой системы координат в пространстве.
2. Как называются оси Ox , Oy , Oz ?
3. Пространство делится тремя взаимно перпендикулярными плоскостями?
4. Сколькими осями координат образована координатная плоскость?
5. Как найти расстояние между точками через их координаты, нахождение координат середины отрезка.

Задания для самостоятельной работы

1. Если прямоугольная система координат обозначена O_{xyz} , то прямая O_x называется осью какой?, Если прямая O_y – ось? Если прямая O_z , то как называется ось?
2. Дана точка $M (2; -3; 0)$. Как называются числа 2, -3, 0? Чем являются числа 2, -3, 0?
3. Расположение данных точек $A (0; -3; 0)$, $B (2; 0; -1)$, $C (1; -3; 6)$, $D (-3; 0; 0)$, $E (0; 2; 2)$ в декартовой системе (пространство, плоскость, ось)
4. Изобразите в декартовой системе координат следующие точки: $A(1; 1; 2)$, $B(0; 0; 1)$, $C(0; 0; -2)$, $D(0; 1; 2)$, $E(2; -2; 0)$, $F(0; 0; 0)$
5. Найти:
 - расстояние между точками A и D , если $A(1; 1; 2)$, $D(0; 1; 2)$

- координаты середины отрезка AB , если $A(1;1;2)$, $B(0;0;1)$
- 6. Найдите координаты вектора $\vec{p} = 4\vec{a} - 0,5\vec{b} - \vec{c}$, если $\vec{a} = \{2; 0; -0,5\}$, $\vec{b} = \{-4; 2; 0\}$, $\vec{c} = \{0; -3; 2\}$.
- 7. По рисунку определите координату вершин точек куба:



- 8. Расположение данных точек $A(1;0;0)$, $B(5;3;-1)$, $C(0;-3;6)$, $D(0;0;6)$, $E(0;1;0)$ в декартовой системе (пространство, плоскость, ось)
- 9. Изобразите в декартовой системе координат следующие точки: $A(0;1;0)$, $B(0;0;-1)$, $C(2;3;2)$, $D(2;1;-2)$, $E(4;-2;-2)$, $F(1;5;0)$. Каждую точку постройте на отдельной системе координат.
- 10. Найти:
 - а) расстояние между точками A и C , если $A(0;1;3)$, $C(1;1;6)$
 - б) координаты середины отрезка AC , если $A(2;2;4)$, $B(0;4;2)$
- 11. Легенда: у древних греков существовала легенда о созвездиях Большой и Малой Медведицы. Всемогуший бог Зевс решил взять себе в жёны прекрасную нимфу Калисто, одну из служанок богини Афродиты, вопреки желанию последней. Чтобы избавить Калисто от преследований богини, Зевс обратил Калисто в Большую Медведицу, её любимую собаку – в Малую Медведицу и взял их на небо.
 Постройте по координатам созвездие Большой Медведицы:
 $(-7,5;0,5)$, $(-5;1,5)$, $(-1,5;1)$, $(3;1)$, $(2,5;-1)$, $(-0,5;-1)$, $(-1,5;1)$.

Векторы в пространстве

Значение темы:

Вектор – одно из основных геометрических понятий. Он характеризуется числом (длиной) и направлением. Наглядно он представляется в виде направленного отрезка. Многие физические величины являются векторными (характеризуются абсолютной величиной и направлением). Перемещение, скорость, время, ускорение, сила, давление, пройденный путь.

Тема «Векторы в пространстве» является одной из основных тем раздела «Стереометрия», а также имеет практическое применение в физике и других прикладных науках, в том числе и медицине.

Цели занятия: на основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

- действия над векторами в пространстве.

уметь:

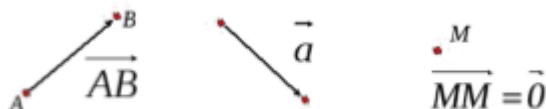
- выполнять с векторами действия сложения, умножения на число, скалярного произведения векторов;

- находить угол между векторами, скалярное произведение векторов.

использовать вектора при решении математических и прикладных задач

Краткое содержание темы

Определение. Вектором называется направленный отрезок.



Определение. Единичным вектором или ортом называется вектор, длина которого равна единице и который направлен вдоль какой-либо координатной оси.

- единичный вектор, направленный вдоль оси x, обозначается i .
- единичный вектор, направленный вдоль оси y, обозначается j .
- единичный вектор, направленный вдоль оси z, обозначается k .
- вектора i, j, k называются координатными векторами.
- любой вектор a можно разложить по координатным векторам: $a = xi + yj + zk$.

Определение. Координатами вектора с началом в т. $A_1(X_1, Y_1, Z_1)$ и концом в т. $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$ называются числа $a = X_2 - X_1$, $b = Y_2 - Y_1$, $c = Z_2 - Z_1$.

$$\vec{a} = (a, b, c)$$

Пример: Найти координаты вектора $\vec{a}$, если координата с началом точки А (1; 2; 4) и концом в точки В (2; 3; 4)

Решение:

$$a = 2 - 1 = 1$$

$$b = 3 - 2 = 1$$

$$c = 4 - 4 = 0$$

Следовательно вектор: $\vec{a} = (1; 1; 0)$

Определение. Длина (модуль) вектора $\vec{a}$ - это длина отображающего его отрезка АВ, обозначается $|\vec{a}|$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Пример: Найти длину вектора $\vec{a} = (1; 1; 0)$

Решение:

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$$

Свойства векторов, заданных координатами:

- 1) координаты нулевого вектора равны нулю;
- 2) координаты равных векторов соответственно равны;
- 3) координаты вектора суммы двух векторов равны сумме соответствующих координат этих векторов;
- 4) координаты вектора разности двух векторов равны разностям соответствующих координат этих векторов;
- 5) координаты вектора произведения данного вектора на число равны произведениям соответствующих координат этого вектора на данное число.

Действия над векторами в пространстве:

1. Сумма и разность двух векторов

$$\vec{a}(x_a; y_a; z_a) \text{ и } \vec{b}(x_b; y_b; z_b)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_a + x_b; y_a + y_b; z_a + z_b)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_a - x_b; y_a - y_b; z_a - z_b)$$

Пример: найти сумму векторов $\vec{a} = (1; 2; 1)$ и $\vec{b} = (4; 8; 0)$.

Решение: $\vec{a} + \vec{b} = (1 + 4; 2 + 8; 1 + 0) = (5; 10; 1)$

2. Произведение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a} = (a; b; c)$ на число k называется вектор $k\vec{a} = (ka; kb; kc)$

Пример: $k=2$, $\vec{a} = (2; -1; 0)$

Найти: $k\vec{a} = ?$

Решение:

$$2\vec{a} = (2*2; -1*2; 0*2) = (4; -2; 0)$$

Свойства:

- 1) совпадает с направлением вектора, если $\alpha > 0$;
- 2) противоположно направлению вектора, если $\alpha < 0$;
- 3) произвольно, если $\alpha = 0$.

Скалярное произведение векторов. Угол между двумя векторами

Теорема: Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Следствие 1: ненулевые векторы $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

Следствие 2: косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой:

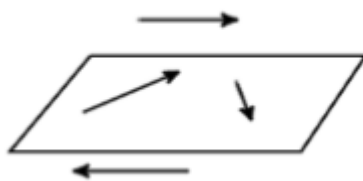
$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Определение. Вектора, параллельные одной прямой или лежащие на одной прямой называют коллинеарными векторами.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{b}| = k|\vec{a}|$$

Теорема. Для того чтобы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были бы коллинеарными необходимо и достаточно, чтобы $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ (k - скаляр).

Определение. Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются компланарными, если они параллельны некоторой плоскости в широком смысле.



Контрольные вопросы:

1. Чему равны уравнения прямой, плоскости и сферы.
2. Дайте определение вектора, координаты вектора, модуля вектора, равенства векторов.
3. Как сложить вектора, умножить вектор на число? Какие действия над векторами можно еще совершать?
4. Чему равно скалярное произведение векторов, угол между двумя векторами?
5. Какие векторы называются равными?

Задания для самостоятельной работы

Задача 1.

Даны точки: A(4;9;-1), B(3;2;5), C(-4;-5;4) и D(-3;2;-2)

Найдите:

1. Равные векторы среди векторов: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BD}$
2. Сумму векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$
3. Произведение вектора $\overrightarrow{BC}$ на число $\lambda=2$
4. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BD}$
5. Косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BD}$

Задача 2.

Даны точки: A(3;5;-1), B(1;5;9), C(-2;-7;0) и D(0;0;-2)

Найдите:

1. Равные векторы среди векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$
2. Сумму векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BD}$
3. Произведение вектора $\overrightarrow{BD}$ на число $\lambda=-3$
4. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$
5. Косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$

Зачетное занятие

Значение темы:

Математика всегда была неотъемлемой и существеннейшей составной частью человеческой культуры, она является ключом к познанию окружающего мира, базой научно-технического прогресса и важной компонентой развития личности.

Данное занятие направлено на выявление умений применения полученных знаний на практике.

Цели занятия: на основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

- аксиомы стереометрии и следствия из аксиом;
- определение параллельных и скрещивающихся прямых;
- теорема о параллельности прямых в пространстве;
- признак параллельности прямых;
- признак параллельности прямой и плоскости;
- признак параллельности плоскостей в пространстве;
- теорема о существовании плоскости, параллельной данной плоскости;
- свойства параллельных плоскостей;
- определение перпендикулярных прямых в пространстве;
- определение перпендикулярных плоскостей;
- теорема о перпендикулярности прямых в пространстве;
- признак перпендикулярности прямой и плоскости;
- свойства перпендикулярных прямой и плоскости;
- определение перпендикуляра, наклонной, проекции наклонной;
- теорема о трёх перпендикулярах;
- определение перпендикулярных плоскостей в пространстве;
- признак перпендикулярности плоскостей;
- определение общего перпендикуляра;
- определение расстояния между скрещивающимися прямыми;
- определение угла между скрещивающимися прямыми;
- определение угла между прямой и плоскостью;
- определение угла между плоскостями;
- определение двугранного, трёхгранного и многогранного углов;
- определение многогранника;
- определение призмы, её элементов;
- свойства призмы;
- определение прямой призмы;
- определение параллелепипеда;
- определение куба;
- свойства параллелепипеда;

- определение пирамиды и её элементов;
- определение усеченной и правильной пирамиды;
- определение апофемы;
- определение цилиндра и его элементов;
- виды сечений цилиндра плоскостями;
- определение конуса;
- виды сечений конуса плоскостями;
- определение шара;
- определение центра шара, сферы, диаметра шара, шарового сектора и сегмента;
- формулы объема многогранников и тел вращения;
- формулы площадей поверхности тел вращения;
- формула нахождения расстояния между точками через их координаты;
- формула нахождения координат середины отрезка;
- действия над векторами в пространстве.

уметь:

- использовать изученные свойства плоских геометрических фигур при исследовании геометрических объектов пространства, лежащих в одной плоскости;
- находить на рисунке заданные точки, прямые и плоскости;
- иллюстрировать на моделях и изображать на рисунке названные фигуры в заданном взаимном расположении;
- задавать плоскость с помощью трех точек, точки и прямой, пересекающих или параллельных прямых и изображать её на рисунке;
- характеризовать пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые;
- находить на моделях и рисунках пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые;
- правильно изображать на рисунках пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые;
- характеризовать случаи взаимного расположения прямой и плоскости;
- находить на моделях и рисунках прямые, пересекающие плоскость и параллельные ей;
- правильно изображать на рисунках пересечение прямой и плоскости, параллельность прямой и плоскости;
- задавать прямую, параллельную плоскости: доказывать параллельность прямой и плоскости, используя соответствующие свойства;
- характеризовать случаи взаимного расположения плоскостей;
- находить на рисунках пересекающиеся и параллельные плоскости;
- использовать свойства комбинации параллельных плоскостей с прямыми и другими плоскостями для решения задач;
- характеризовать перпендикулярность прямой и плоскости;
- задавать прямую, перпендикулярную плоскости;

- использовать свойства перпендикулярности прямой и плоскости для решения задач;
- находить на моделях и рисунках прямые, перпендикулярные плоскостям;
- находить на моделях и рисунках перпендикулярные плоскости;
- находить расстояние между скрещивающимися прямыми;
- использовать признак перпендикулярности плоскостей для решения задач;
- определять полупрямые, задающие угол между прямой и плоскостью;
- задавать линейный угол двугранного угла и изображать его на рисунке;
- измерять угол между прямой и плоскостью, линейный угол двугранного угла;
- различать и показывать на моделях прямую и правильную призмы, прямоугольный параллелепипед, куб;
- изображать на рисунках четырехугольные и треугольные призмы и их элементы;
- использовать свойства призмы, параллелепипеда и куба при решении стереометрических задач;
- различать и показывать на моделях пирамиду и правильную пирамиду;
- изображать на рисунках треугольные и четырехугольные пирамиды и их элементы;
- в несложных случаях изображать на рисунках треугольных и четырехугольных пирамид высоту пирамиды, связывая её элементы на основе соответствующих свойств;
- использовать свойства пирамиды, усеченной пирамиды при решении стереометрических задач;
- различать и показывать на моделях цилиндр;
- изображать цилиндр, осевые сечения цилиндра, выделяя их линейные элементы;
- различать и показывать на моделях конус;
- изображать конус, осевые сечения конуса, выделяя их линейные элементы;
- различать сферу и шар;
- изображать сечения шара плоскостями, выделяя в них соответствующие линейные элементы;
- решение стереометрических задач на нахождение объемов многогранников и тел вращения;
- решение стереометрических задач на нахождение площадей поверхности;
- находить расстояние между точками и координаты середины отрезка;
- изображать точки в декартовой системе координат;
- использовать координаты при решении математических и прикладных задач;
- выполнять с векторами действия сложения, умножения на число, скалярного произведения векторов;

- находить угол между векторами, скалярное произведение векторов;
- использовать вектора при решении математических и прикладных задач.

Методические указания для самостоятельной работы обучающихся

1. Для теоретического задания необходимо записать формулировку определения, теорем или свойств. Подготовить чертеж, подписав элементы.
2. Для каждого практического задания необходимо оформить дано, чертеж, решение, ответ.
3. В решении необходимо записывать сначала исходную формулу в общем виде, а затем ниже по ней производить вычисления.

Критерии оценки

5(отлично) – последовательно и исчерпывающе отвечает на поставленные вопросы, при выполнении практической работы – два задания выполнены правильно и в установленное нормативом время.

4(хорошо) – правильно отвечает на теоретический материал, при выполнении практической работы – два задания выполнено правильно, но обоснования шагов решения недостаточны; допущена одна ошибка или два недочета в выкладках.

3(удовлетворительно) – обучающийся знает лишь основной материал, а на заданные вопросы отвечает недостаточно четко и полно, при выполнении практической работы – два задания выполнены, но допускались ошибки, не отразившиеся на качестве выполненной работы.

2(неудовлетворительно) – обучаемый не смог достаточно полно и правильно ответить на поставленные вопросы, при выполнении практической работы – задания не выполнены или допущены ошибки, влияющие на качество выполненной работы.

Перечень вопросов, выносимых на промежуточную аттестацию

1. Сформулируйте группу аксиом стереометрии.
2. Объясните, через какие фигуры пространства можно провести плоскость и притом только одну.
3. Объясните взаимное расположение прямых в пространстве
4. Объясните взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве
5. Объясните взаимное расположение плоскостей в пространстве
6. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах и обратную к ней
7. Объясните, как найти расстояние между скрещивающимися прямыми
8. Объясните, как определяются координаты точки в пространстве. Выразите расстояние между двумя точками через координаты этих точек.
9. Объясните, как определяются координаты точки в пространстве. Выведите формулы для координат середины отрезка через координаты его концов.

10. Дайте определение координат вектора, действий над векторами (сложение, умножения на число, скалярное произведение).
11. Дайте определение угла между скрещивающимися прямыми.
12. Дайте определение угла между плоскостями.
13. Какие векторы в пространстве называются коллинеарными, компланарными.
14. Дайте определение угла между прямой и плоскостью?
15. Дайте определение многогранника. Приведите примеры выпуклого и невыпуклого многогранника. Приведите примеры правильного многогранника.
16. Дайте определение призмы. Сделайте чертеж. Назовите элементы призмы (основание, высоту, боковые ребра и грани)
17. Дайте определение параллелепипеда. Сделайте чертеж. Нахождение диагонали прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям.
18. Дайте определение пирамиды. Сделайте чертеж. Назовите элементы пирамиды (основание, боковые ребра и грани, высоту, вершину)
19. Дайте определение цилиндру. Сделайте чертеж. Покажите элементы цилиндра (основание, высоту, образующую, ось симметрии, радиус). При вращении какой плоской фигуры можно получить прямой цилиндр.
20. Дайте определение конуса. Сделайте чертеж. Назовите элементы конуса (основание, высота, ось симметрии, радиус, образующая). При вращении какой плоской фигуры можно получить конус.
21. Расскажите о сечении плоскостями цилиндра, конуса, шара.
22. Дайте определение шара, шарового сегмента и сектора.
23. Дайте определение объема. Приведите формулу нахождения объема прямоугольного параллелепипеда.
24. Дайте определение объема. Приведите формулу нахождения объема наклонного параллелепипеда.
25. Дайте определение объема. Приведите формулу нахождения объема n -угольной призмы.
26. Дайте определение объема. Приведите формулу нахождения объема пирамиды.
27. Дайте определение объема. Приведите формулу нахождения объема усеченной пирамиды.
28. Дайте определение объема. Приведите формулу нахождения объема цилиндра.
29. Дайте определение объема. Приведите формулу нахождения объема конуса
30. Дайте определение объема. Приведите формулу нахождения объема усеченного конуса.

31. Дайте определение объема. Приведите формулу нахождения объема шара.
32. Выведите формулу нахождения площади боковой и полной поверхности цилиндра.
33. Выведите формулу нахождения площади боковой и полной поверхности конуса

Список литературы

1. Башмаков, М. И. Математика : учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 10-е изд., стер. - М. : Академия, 2015. – 256 с
2. Башмаков, М. И. Математика. Сборник задач профильной направленности : учеб. пособие для учреждений сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2014. - 208 с.
3. Богомолов, Н. В. Геометрия : учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. - М. : Юрайт , 2020. - 108 с.
4. Богомолов, Н. В. Математика. Углубленный уровень. 10—11 классы : учебник для среднего общего образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт , 2022. - 399 с.

Электронные ресурсы:

ЭБС КрасГМУ «Colibris»
ЭБС Консультант студента ВУЗ
ЭБС Консультант студента Колледж
ЭБС Айбукс
ЭБС Букап
ЭБС Лань
ЭБС Юрайт
ЭБС MedLib.ru
НЭБ eLibrary
ЭМБ Консультант врача
СПС КонсультантПлюс

Типография КрасГМУ
Подписано в печать 01.11.2022. Заказ № 20026

660022, г.Красноярск, ул.П.Железняка, 1