Кафедра медицинской и биологической физики

Физические основы медицинской техники

Тема: Электромагнитные колебания и волны

Лекция №4 для студентов 1 курса специальности стоматология

Д.ф.-м.н., зав.каф., Салмин Владимир Валерьевич

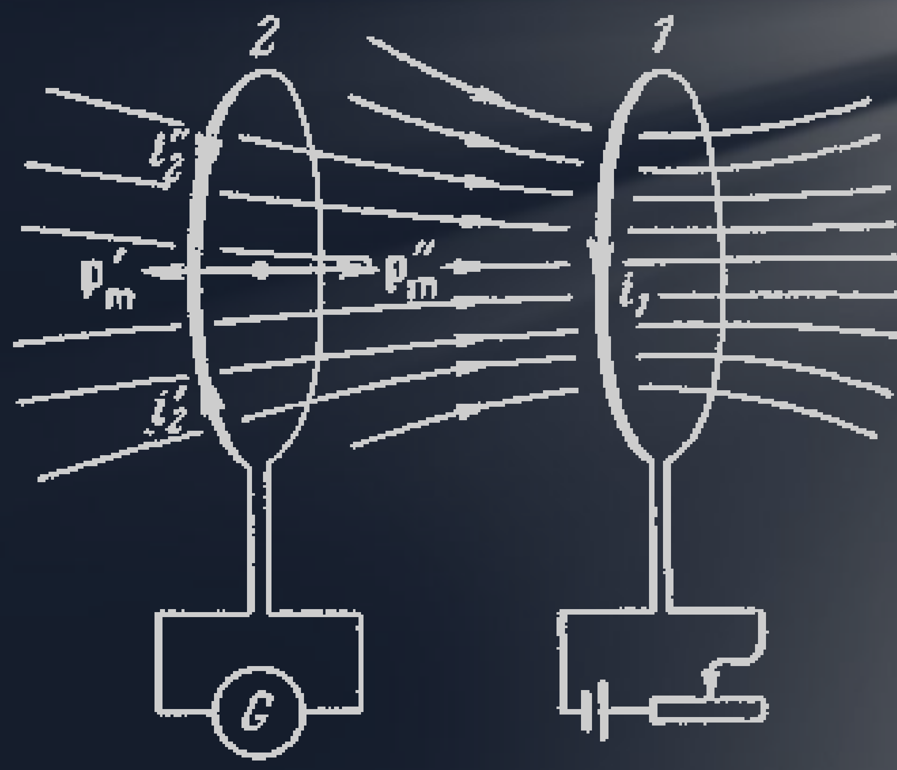
Цель: Изучение основных законов электромагнитной индукции

План:

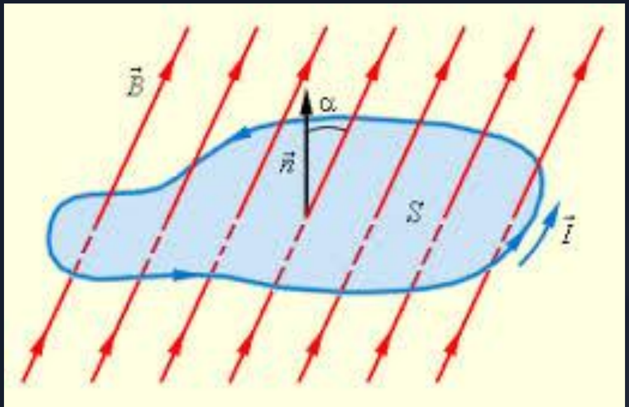
1. Явление электромагнитной индукции
2. Медицинское применение электромагнитной индукции
3. Правило Ленца
4. ЭДС индукции
5. Правило левого винта
6. Потокосцепление
7. Расчет ЭДС индукции
8. Явление самоиндукции
9. Индуктивность
10. Ток в цепи с индуктивностью
11. Энергия магнитного поля
12. *********

Явление электромагнитной индукции

В 1831 г. Фарадей открыл, что во всяком замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную этим контуром, возникает электрический ток. Это явление называют электромагнитной индукцией, а возникающий ток индукционным.



Явление электромагнитной индукции



Величина индукционного тока не зависит от способа, которым вызывается изменение потока магнитной индукции Ф,

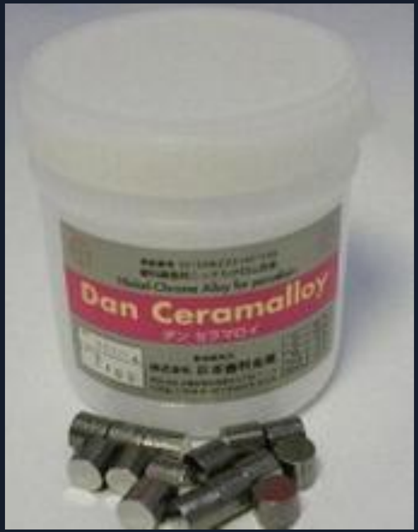
$$\Phi = |B||S|\cos\alpha = \mu_0\mu|H||S|\cos\alpha$$

а определяется лишь скоростью изменения потока

$$I \sim \frac{d\Phi}{dt}$$

При изменении знака $\dfrac{d\Phi}{dt}$ меняется также направление тока

Медицинское применение электромагнитной индукции - стоматология



Никель-хромовый сплав без содержания бериллия. Предназначен для отливки металлокерамических коронок и мостов. Подходит для плавления как в индукционной печи, так и открытым пламенем

Настольная вакуумная индукционная литейная установка УЛВК-30МК предназначена для индукционной плавки и литья в вакууме, с последующим прессованием сжатым воздухом или аргоном зубопротезных сплавов. Установка рассчитана на работу со сплавами драгоценных металлов и никель-кобальт–хром-молибденовых (Ni,Co,Cr,Mo) сплавов, за исключением титана.

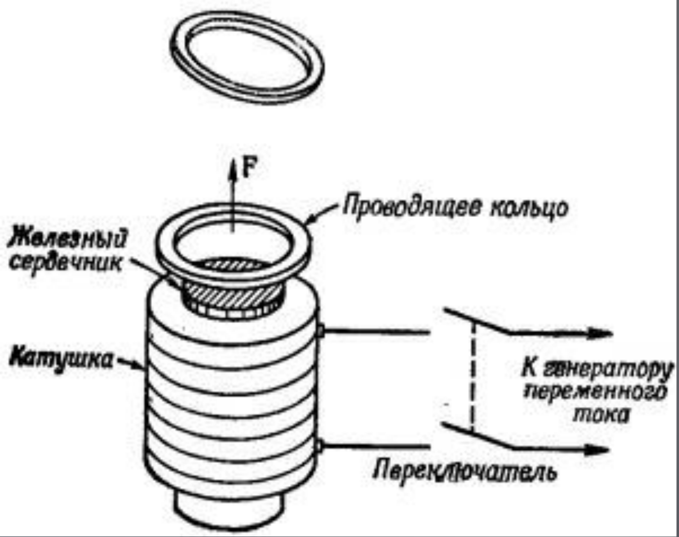
Индуктотермия

Индуктотермия — это метод физиотерапии, основанный на применении магнитного поля высокой частоты.

Магнитное поле (с частотой 13,56; 27,12; 40,68 МГц) образуется при прохождении по проводнику индуктора (представляющего собой плоскую, коническую, цилиндрическую спираль или петлю) переменного тока указанной частоты, подключаемого к аппаратам для индуктотермии и УВЧ-терапии. Подводимое к пациенту магнитное поле по закону электромагнитной индукции возбуждает в хорошо проводящих электрический ток тканях, внутренних органах и жидких средах организма вихревые токи высокой частоты, или токи Фуко, вызывающие образование тепла.

Правило Ленца

Ленц установил правило, с помощью которого можно найти направление индукционного тока. Правило Ленца гласит, что *индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.* Если, например, изменение Ф вызвано перемещением контура, то возникает индукционный ток такого направления, что сила, действующая на него во внешнем поле, противится движению контура.



Электродвижущая сила индукции

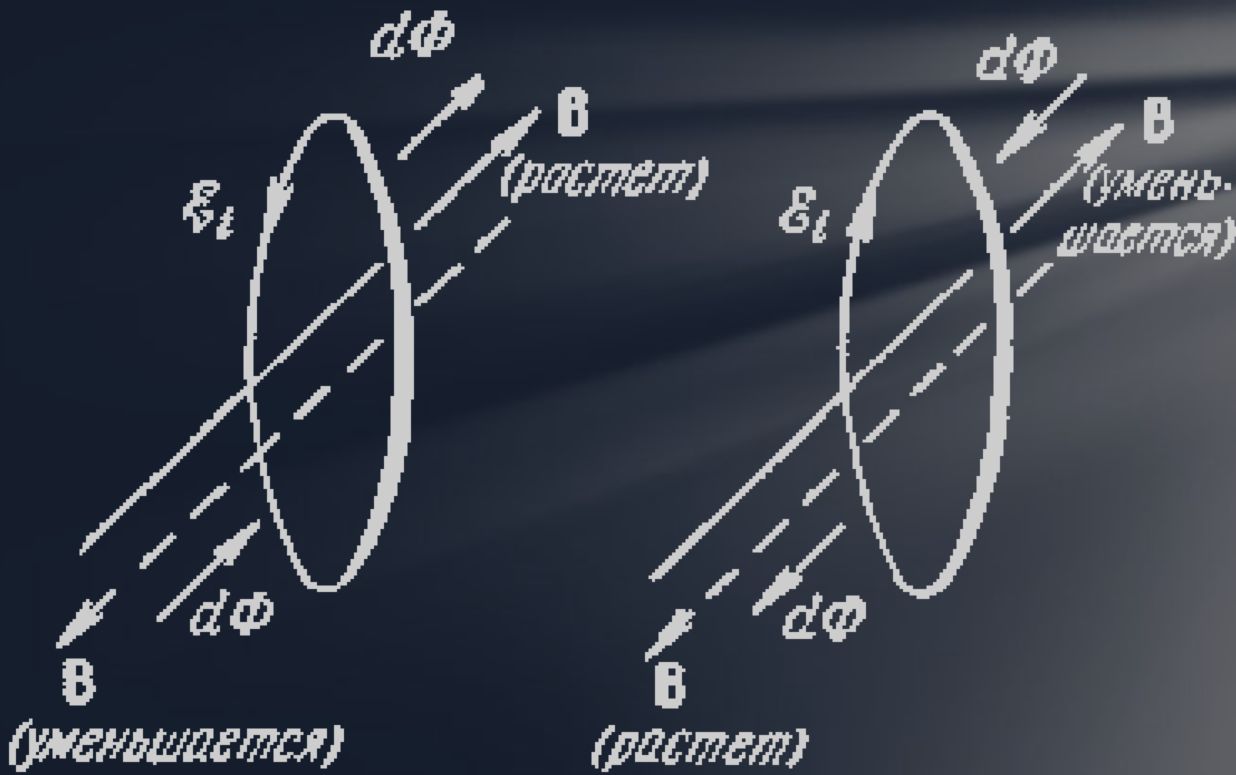
Для создания тока в цепи необходимо наличие э. д. с. Поэтому явление электромагнитной индукции свидетельствует о том, что при изменениях магнитного потока Ф в контуре возникает электродвижущая сила индукции $\mathscr{E}_i$.

$$\mathscr{E}_i = B\frac{dS}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Единицей потока магнитной индукции в СИ служит вебер *(вб)*, который представляет собой поток через поверхность в 1 $м^2$, пересекаемую нормальными к ней линиями магнитного поля с *B*, равной 1 тесла. При скорости изменения потока, равной 1 *вб/сек*, в контуре индуцируется э. д. с, равная 1 *в*

Правило левого винта

На рисунке показано направление $\mathscr{E}_i$ для различных направлений вектора **B** и разной зависимости **B** от времени.



Потокосцепление

Пусть контур, в котором, индуцируется э. д. с, состоит не из одного витка, а из N одинаковых витков, т. е, представляет собой соленоид (или тороид). Поскольку витки соленоида соединяются последовательно $\mathscr{E}_i$ будет равна сумме э. д. с, индуцируемых в каждом из витков в отдельности,

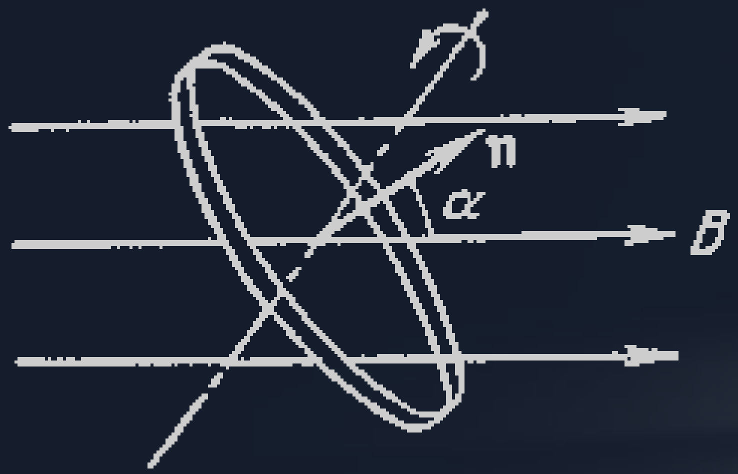
$$\mathscr{E}_i = -\sum \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\sum \Phi\right)$$

Величину $\Psi = \sum \Phi$ называют п о т о к о с ц е п л е н и е м или п о л н ы м м а г н и т н ы м потоком. Ее измеряют в тех же единицах, что и Ф. Если поток, пронизывающий каждый из витков, одинаков, $\Psi = N\Phi$

Воспользовавшись потокосцеплением, выражение для э.д.с, индуцируемой в соленоиде, можно записать в виде

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt}$$

Пример расчета ЭДС индукции



Катушка, имеющая N витков, вращается в однородном магнитном поле с постоянной скоростью ω. Найдем индуцируемую в ней э.д.с. Поток через один виток $\Phi = BS\cos\alpha$ где S — площадь витка, α— угол между нормалью к плоскости витка и направлением B.

Полный поток $\Psi = N\Phi = NBS\cos\alpha$

Угол α меняется со временем по закону α=ωt, Следовательно,

$$\Psi = N\Phi = NBS\cos\omega t = \Psi_m \cos\omega t$$

где через Ψ_m обозначено амплитудное значение полного потока. ЭДС равно

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = \Psi_m\omega\sin\omega t = \mathscr{E}_m \sin\omega t$$

Таким образом, в катушке индуцируется переменная э.д.с, изменяющаяся со временем по гармоническому закону.

Явление самоиндукции

Электрический ток i, текущий в любом контуре, создает пронизывающий этот контур магнитный поток Ψ При изменениях i будет изменяться также Ψи, следовательно, в контуре будет индуцироваться э.д.с. Это явление называется с а м о и н д у к ц и е й .

В соответствии с законом Био — Савара магнитная индукция B пропорциональна силе тока, вызвавшего поле. Отсюда вытекает, что ток в контуре i и создаваемый им полный магнитный поток через контур Ψ друг другу пропорциональны:

$$\Psi = Li$$

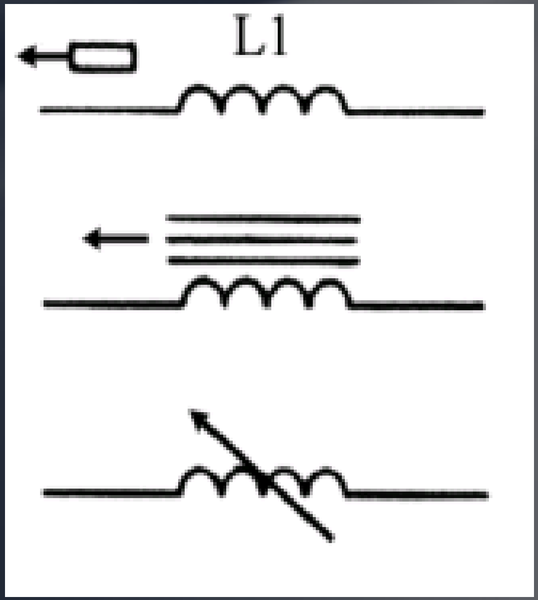
Коэффициент пропорциональности L между силой тока и полным магнитным потоком называется индуктивностью контура.

Индуктивность

Индуктивность *L* зависит от геометрии контура (т. е. его формы и размеров) и от магнитных свойств окружающей контур среды.

Если контур жесткий и поблизости от него нет ферромагнетиков, индуктивность *L* будет постоянной величиной.

За единицу индуктивности в СИ принимается индуктивность такого проводника, у которого при силе тока в нем в 1 *а* возникает полный поток , равный 1 *вб.* Эту единицу называют генри *(гн)*



Расчет индуктивности

Возьмем соленоид такой длины, чтобы его можно было практически считать бесконечным. При протекании по нему тока i внутри соленоида возбуждается однородное поле, магнитная индукция которого равна $B = \mu_0 \mu n i$ Поток через каждый из витков будет $\Phi = BS$, а полный магнитный поток, сцепленный с соленоидом, равен

$$\Psi = N\Phi = nlBS = \mu_0 \mu n^2 lSi$$

где l — длина соленоида (которая предполагается очень большой), S — площадь поперечного сечения, n — число витков на единицу длины (произведение nl дает полное, число витков N).

Тогда индуктивность длинного соленоида

$$L = \mu_0 \mu n^2 lS = \mu_0 \mu n^2 V = \mu_0 \mu \frac{N^2}{l} S \quad :$$

Размерность μ_0 равна размерности индуктивности, деленной на размерность длины (Гн/м)

Электротехническое определение индуктивности

При изменениях силы тока в контуре возникает э.д.с. самоиндукции

$$\mathscr{E}_s = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d\left(Li\right)}{dt} = -\left(L\frac{di}{dt} + i\frac{dL}{dt}\right)$$

Если L при изменениях силы тока остается постоянной (при отсутствии ферромагнетиков), выражение для э.д.с. имеет вид

$$\mathscr{E}_i = -L\frac{di}{dt}$$

Индуктивность L коэффициент пропорциональности между скоростью изменения силы тока в контуре и возникающей вследствие этого э. д. с. самоиндукции.

При наличии ферромагнетиков L недеформируемого контура будет функцией от i, а э.д.с равен

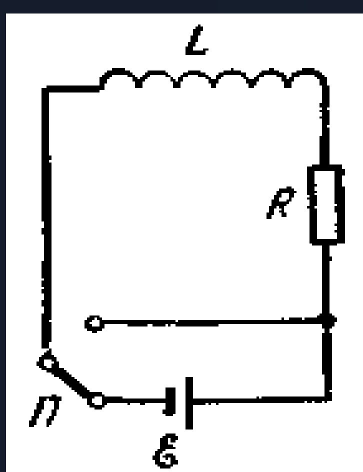
$$\mathscr{E}_i = -\left(L + i\frac{dL}{di}\right)\frac{di}{dt}$$

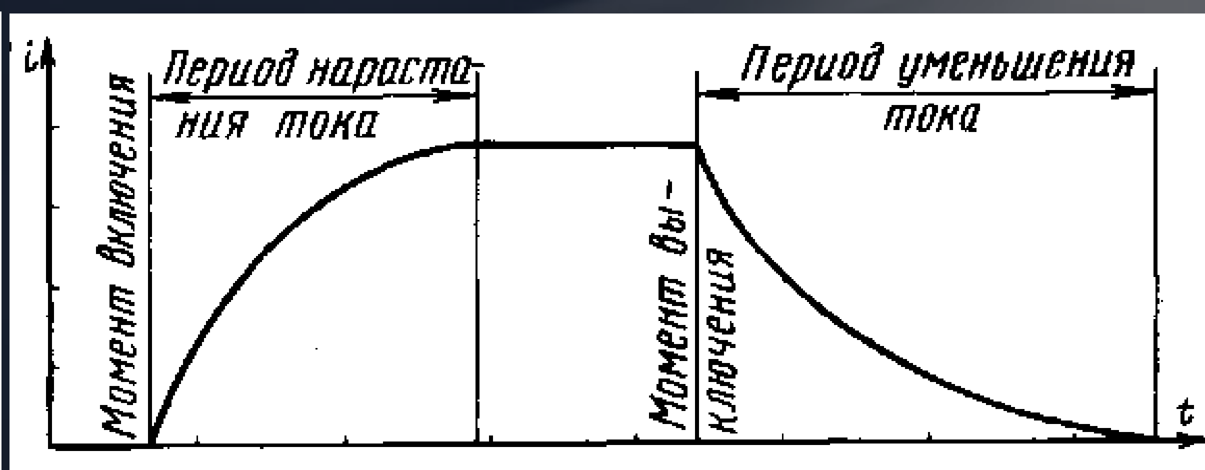
В случае, когда L — const, изменение силы тока со скоростью 1 *а/сек* в проводнике с L — 1 *Гн* приводит к возникновению э.д.с =1 *в*

Ток в цепи с индуктивностью

По правилу Ленца дополнительные токи, возникающие в проводниках вследствие самоиндукции, всегда направлены так, чтобы воспрепятствовать изменениям тока, текущего в цепи. Это приводит к тому, что установление тока при замыкании цепи и убывание тока при размыкании цепи происходит не мгновенно, а постепенно.

Рассмотрим работу цепи содержащей индуктивность L, резистор R, переключатель П и источник тока $\mathscr{E}$





Ток при размыкании цепи

Пусть в цепь с индуктивностью L и сопротивлением R включен источник тока, имеющий э.д.с. $\mathscr{E}$. Под действием этой э.д.с. в цепи будет течь постоянный ток $I_0 = \dfrac{\mathscr{E}}{R}$.

В момент времени $t = 0$ отключим источник тока замкнув одновременно цепь накоротко переключателем *П*. Как только сила тока в цепи станет убывать, возникнет э.д.с. самоиндукции и сила тока в цепи будет удовлетворять уравнению

$$iR = \mathscr{E}_s = -L\frac{di}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

Ток при размыкании цепи

Проинтегрируем уравнение $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0$, разделив переменные

$\frac{di}{i}=-\frac{R}{L}dt$ откуда $\ln i=-\frac{R}{L}t+\ln const$ или

$i=const\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$ Значение *const* найдем из начальных условий. При $t = 0$ сила тока имела значение I_0

$$i=I_0\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

Скорость убывания определяется имеющей размерность времени величиной $\tau=\frac{L}{R}$ которую называют постоянной времени цепи. τ есть время, в течение которого сила тока уменьшается в e раз.

Ток при замыкании цепи

После подключения к источнику тока, до тех пор, пока сила тока не примет установившегося значения в цепи кроме э.д.с. источника будет действовать э.д.с. самоиндукции.

$$iR = \mathscr{E} + \mathscr{E}_s = \mathscr{E} - L\frac{di}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{\mathscr{E}}{L}$$

Мы пришли к линейному неоднородному уравнению

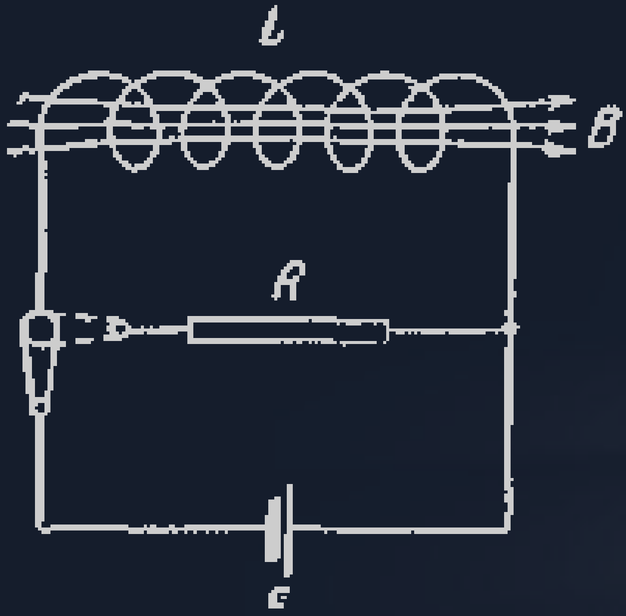
Общее решение линейного неоднородного уравнения можно получить, прибавив любое его частное решение к общему решению соответствующего однородного уравнения.

Частным решением является $i = I_0 = \dfrac{\mathscr{E}}{R}$

Общее решение уравнения: $i = I_0 + const\,\exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right)$

В начальный момент сила тока *I* равна нулю. От« сюда для const получается значение $const = -I_0$

Энергия магнитного поля



Замкнем батарею $\mathscr{E}$ на соленоид L; в нем установится ток I, который обусловит магнитное поле. Переключим соленоид на сопротивление R, в цепи будет течь постепенно убывающий ток. Работа, совершаемая этим током за время dt, равна

$$dA = \mathscr{E}_s idt = -\frac{d\Psi}{dt} idt = -id\Psi$$

Если индуктивность соленоида не зависит от t (L = const), то $d\Psi = Ldi$, то $dA = -Lidi$

Энергия магнитного поля

Проинтегрировав выражение $dA = -Lidi$ по i в пределах от первоначального значения i до нуля, получим работу, совершаемую в цепи за все время, в течение которого происходит исчезновение магнитного поля:

$$A = -\int_{i}^{0} Lidi = \frac{Li^2}{2}$$

Работа идет на приращение внутренней энергии проводников, т. е. на их нагревание. Совершение этой работы сопровождается исчезновением магнитного поля, которое первоначально существовало в окружающем соленоид пространстве. Таким образом, проводник с индуктивностью L, по которому течет ток i, обладает энергией

$$W = \frac{Li^2}{2}$$

которая локализована в возбуждаемом током магнитном поле

ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК
Квазистационарные токи

Закон Ома был установлен для постоянного тока. Однако он остается справедливым и для мгновенных значений изменяющихся тока и напряжения, если только их изменения происходят не слишком быстро. Электромагнитные возмущения распространяются по цепи со скоростью, равной скорости света *c=300000 км/с*. Если за время $\tau = l / c$ необходимое для передачи возмущения в самую отдаленную точку цепи, сила тока изменяется незначительно, то мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи будут практически одинаковыми. Токи, удовлетворяющие такому условию, называются **квазистационарными.** Для периодически изменяющихся токов условие квазистационарности запишется следующим образом:

$$\tau = \frac{l}{c} \ll T \qquad (0.1)$$

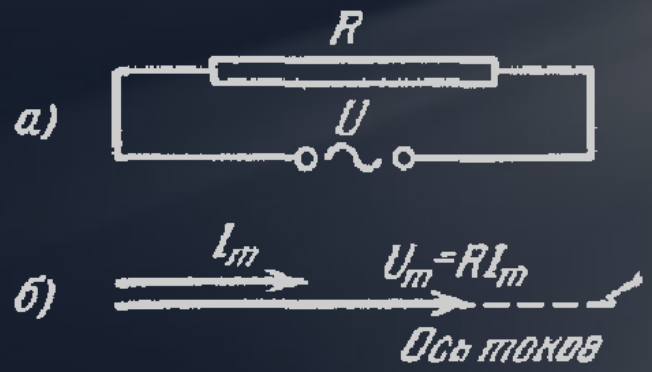
где *T* — период изменений.

Активное сопротивление, векторная диаграмма

Пусть к зажимам сопротивления R, не обладающего индуктивностью и емкостью) (такое сопротивление называется **активным**), приложено напряжение, изменяющееся по закону $U = U_m \cos\omega t$ При выполнении условия квазистационарности ток через сопротивление определяется законом Ома

$$i = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R}\cos\omega t = I_m \cos\omega t$$

Таким образом, между амплитудными значениями силы тока и напряжения имеется соотношение $I_m = \dfrac{U_m}{R}$



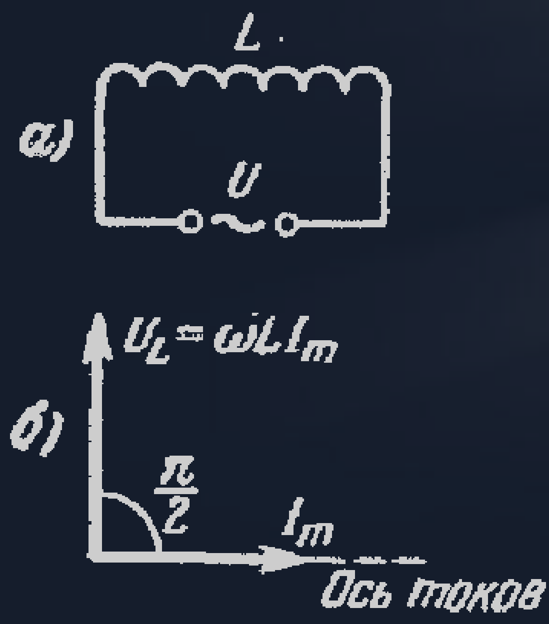
Совокупность векторов напряжений или токов образует **векторную диаграмму** данной цепи.

Переменный ток, текущий через индуктивность

Подадим переменное напряжение на концы индуктивности L с пренебрежимо малыми сопротивлением и емкостью. В индуктивности начнет течь переменный ток, вследствие чего возникнет э.д.с, самоиндукции

$$E_s = -L\frac{di}{dt}$$

Сумма падений напряжений для замкнутой цепи без источника тока равна 0 (2 правило Кирхгоффа)



$$U_m \cos \omega t - L\frac{di}{dt} = 0$$

В рассматриваемом случае все внешнее напряжение приложено к индуктивности L. Следовательно, величина $U_L = L\frac{di}{dt}$ есть не что иное, как падение напряжения на индуктивности.

Индуктивное сопротивление

Перепишем уравнение в виде $di = \frac{U_m}{L}\cos\omega t\, dt$ Интегрирование дает $i = \frac{U_m}{\omega L}\sin\omega t + const$

Постоянной составляющей тока, очевидно, нет; поэтому const = 0. Таким образом,

$$i = \frac{U_m}{\omega L}\sin\omega t = I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}$$

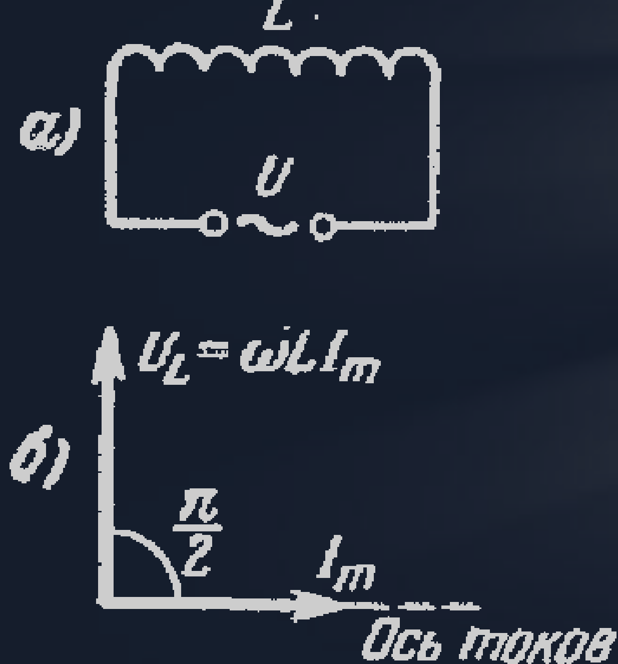
Роль сопротивления играет величина которую называют реактивным индуктивным сопротивлением или просто индуктивным сопротивлением $X_L = \omega L$ Если L взять в генри, а ω— в c^{-1}, то X_L будет выражено в омах,

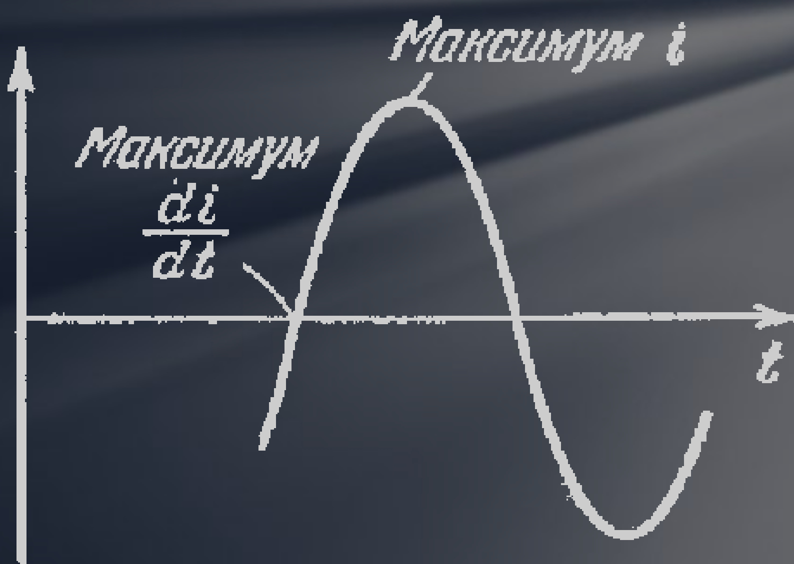
Величина индуктивного сопротивления растет с частотой ω. Постоянному току (ω = 0) индуктивность не оказывает сопротивления.

Падение напряжения на индуктивности

Для падения напряжения на индуктивности можем получить следующее выражение: $U_L = \omega L I_m \cos \omega t$

Падение напряжения на индуктивности опережает по фазе ток, текущий через индуктивность, на π/2.





Переменный ток, текущий через емкость

Пусть напряжение подано на емкость C Индуктивностью цепи и сопротивлением подводящих проводов будем пренебрегать. Емкость непрерывно перезаряжается, вследствие чего в цепи течет переменный ток. Поскольку сопротивление подводящих проводов пренебрежимо мало, напряжение на конденсаторе $U_C = \dfrac{q}{C}$ можно считать равным внешнему напряжению ***U*:**

$$U_C = \frac{q}{C} = U_m \cos \omega t$$

Сила тока в цепи с емкостью

Производная от q по t даст силу тока в цепи.

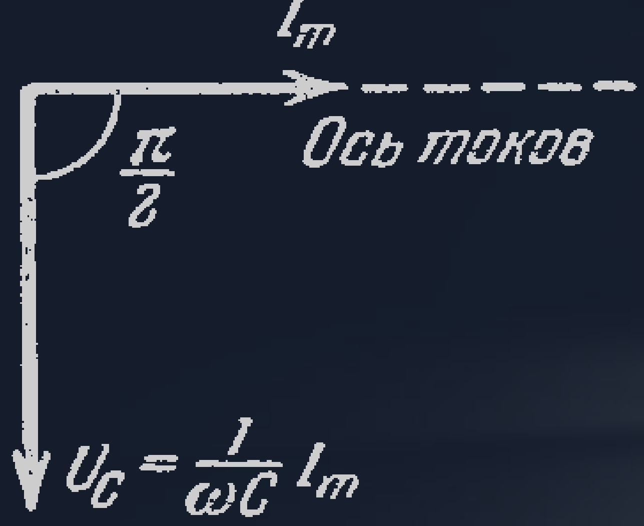
$$i = -\omega C U_m \sin \omega t = I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_m = \omega C U_m = \frac{U_m}{\left(1/\omega C\right)}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

называется реактивным емкостным сопротивлением или просто емкостным сопротивлением. Если С взять в фарадах, а ω в c^{-1}, то X_c будет выражено в омах. Для постоянного тока ($\omega \to 0$) $X_c \to \infty$ ток через конденсатор течь не может Переменный ток может течь через конденсатор, причем оказываемое току сопротивление будет тем меньше, чем больше частота тока и емкость конденсатора С.

Падение напряжения на емкости



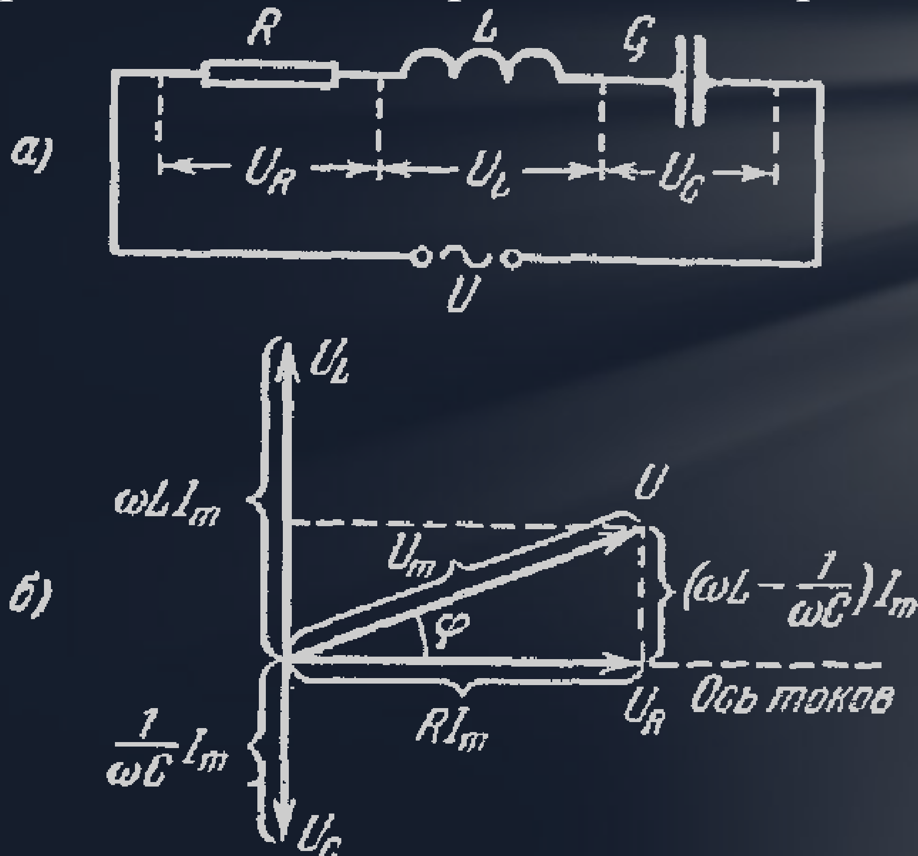
Заменив U_m через $\frac{1}{\omega C} I_m$, для падения напряжения на емкости получим

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t$$

Падение напряжения на емкости отстает по фазе от текущего через емкость тока на $\pi/2$

Цепь переменного тока, содержащая емкость, индуктивность и сопротивление

Рассмотрим цепь, составленную из активного сопротивления R, индуктивности L и емкости C. Подадим на концы этой цепи напряжение частоты ω. В цепи возникнет переменный ток той же частоты, амплитуда I_m и фаза которого, очевидно, определяются параметрами цепи R, L и C.



Фазовый сдвиг

Падения напряжений U_R U_L и U_c в сумме должны быть равны приложенному к цепи напряжению V. Поэтому, сложив векторы, изображающие U_R, U_L и U_c, мы получим вектор, изображающий U (его длина равна U_m). Этот вектор образует с осью токов угол, тангенс которого, равен

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

Угол φ дает разность фаз между напряжением U и силой тока I. Из прямоугольного треугольника, гипотенуза которого U_m, следует, что

$$\left(RI_m\right)^2 + \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m\right]^2 = U_m^2$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Реактивное сопротивление

Итак, если напряжение на зажимах цепи изменяется по закону $U = U_m \cos \omega t$ то в цепи течет ток $i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$

Величина $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$

называется п о л н ы м с о п р о т и в л е н и е м цепи.

Величина $X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ р е а к т и в н ы м с о п р о т и в л е н и е м .

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Ток отстает от напряжения или опережает его в зависимости от соотношения между X_L и X_c.

При $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ ток отстает от напряжения,

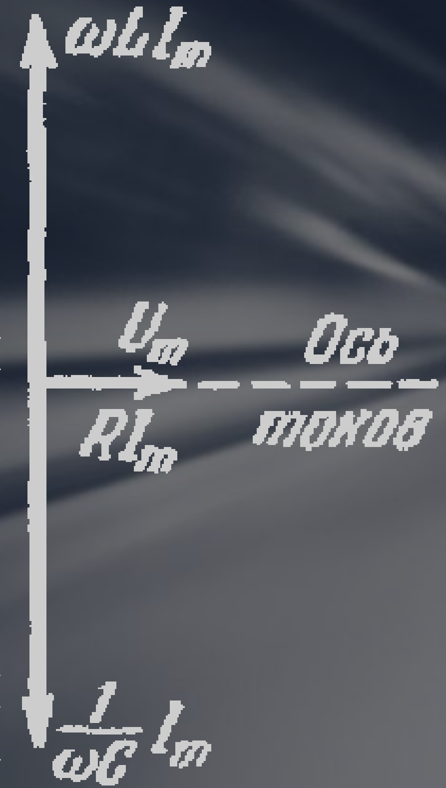
При $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ ток опережает напряжение.

Если $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, изменения тока и напряжения происходят синфазно (φ = 0).

При удовлетворяющей этому условию частоте $\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Резонанс напряжений

При резонансе полное сопротивление цепи Z имеет наименьшее, возможное при данных L и C, значение, равное *R*. Соответственно сила тока достигает наибольшего (возможного при данном U_m) значения. При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи. Падения напряжения на емкости U_c и индуктивности U_L одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется **резонансом напряжений**, а частота — резонансной частотой. Векторная диаграмма для случая резонанса напряжений показана на рис.



Резонанс напряжений

Подставив в выражения для амплитуды напряжения на индуктивности $(U_L = \omega L I_m)$ и емкости $\left(U_C = \frac{1}{\omega C} I_m\right)$ значение резонансной частоты, получим

$$U_L = U_C = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} U_m$$

Если $\sqrt{\frac{L}{C}} > R$ напряжение на индуктивности и на емкости превышает напряжение, приложенное к цепи. Явление резонанса напряжений характерно тем, что полное сопротивление цепи оказывается чисто активным (ток и напряжение изменяются синфазно) и имеет наименьшую возможную при данных параметрах цепи величину

Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

Мгновенное значение мощности, выделяемой в цепи, равно произведению мгновенных значений напряжения и силы тока $P(\mathrm{t}) = U(t)i(t) = U_m \cos\omega t * I_m \cos(\omega t - \varphi)$

выражению для мгновенной мощности можно придать вид

$$P(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}U_m I_m \cos\varphi + \frac{1}{2}U_m I_m \cos(2\omega t - \varphi)$$

Практический интерес представляет среднее по времени значение которое мы обозначим просто P. Так как среднее значение $\cos(2\omega t - \varphi)$ равно нулю, то $P = \frac{U_m I_m}{2}\cos\varphi$

Таким образом, мгновенная мощность колеблется около среднего значения с частотой в два раза превышающей частоту тока

Действующие ток и напряжение

Если ток в цепи не совершает механической работы, средняя мощность выделяется в активном сопротивлении в виде тепла $P = \frac{RI_m^2}{2}$

Такую же мощность развивает постоянный ток, сила которого равна $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

Величина тока называется действующим (или эффективным) значением силы тока. Аналогично величина $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ называется действующим значением напряжения.

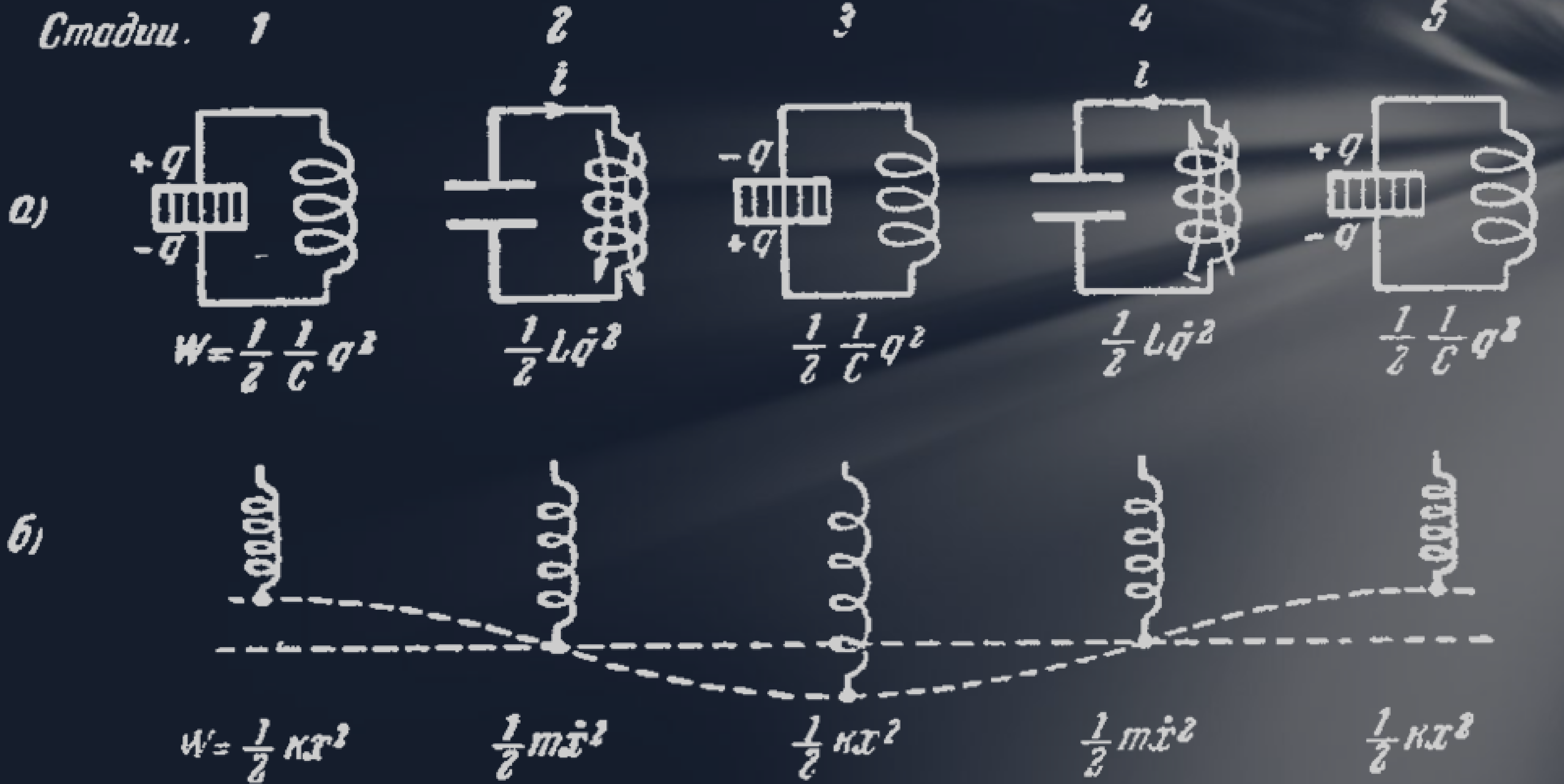
Коэффициент мощности

С использованием действующих значений формуле для средней мощности можно придать вид $P = UI\cos\varphi$

В выражение для мощности входит множитель cos φ, который называют **коэффициентом мощности**.

Если реактивное сопротивление $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ равно нулю (это будет, в частности, при $X_L = X_c = 0$), то $\cos\varphi = 1$ и $P = UI$ При чисто реактивном сопротивлении цепи ($R = 0$) $\cos\varphi = 0$ поэтому и средняя мощность, выделяемая в цепи, равна нулю. В этом случае одну четверть периода тока энергия поступает из внешней сети в цепь, а следующую четверть периода возвращается обратно (мгновенная мощность изменяется с частотой 2ω. Таким образом, при $\cos\varphi = 0$ ни при какой силе тока невозможно получить в цепи среднюю мощность, отличную от нуля. В технике стремятся сделать cosφ как можно больше

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ
Свободные колебания в контуре без активного сопротивления



Уравнение колебательного контура

Во время колебаний внешнее напряжение к контуру не приложено. Поэтому падения напряжения на емкости $U_C = \frac{q}{C}$ и на индуктивности $U_L = L\frac{di}{dt}$ в сумме должны дать нуль

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Разделив это выражение на L и заменив $\frac{di}{dt}$ через $\ddot{q}$ $(i = \dot{q})$, придем к следующему уравнению:

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0. \tag{99.1}$$

Если ввести обозначение

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{99.2}$$

уравнение (99.1) принимает вид

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \tag{99.3}$$

хорошо знакомый нам из учения о механических колебаниях [см. т. I, уравнение (62.6)]. Решением этого уравнения, как известно, является функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha). \tag{99.4}$$

Напряжение и ток в колебательном контуре

Для периода колебаний получается так называемая *формула Томсона*:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \qquad (99.5)$$

Напряжение на конденсаторе отличается от заряда множителем $1/C$:

$$U = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha). \qquad (99.6)$$

Продифференцировав функцию (99.4) по времени, получим выражение для силы тока

$$i = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (99.7)$$

Сопоставляя формулы (99.4) и (99.7), заключаем, что в момент, когда ток достигает максимального значения, заряд (а также напряжение) обращается в нуль, и наоборот. Это соотношение между зарядом и током мы уже установили ранее, основываясь на энергетических соображениях.

Из формул (99.6) и (99.7) вытекает, что

$$U_m = \frac{q_m}{C}, \qquad I_m = \omega_0 q_m.$$

Заменяя ω_0 по формуле (99.2), получим

$$U_m = \sqrt{\frac{L}{C}}\, I_m. \qquad (99.8)$$

Свободные затухающие колебания

сумма падений напряжения на емкости, индуктивности и активном сопротивлении должна быть равна нулю:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}q=0.$$

Разделив это выражение на L и заменив i через $\dot{q}$, а $\frac{di}{dt}$ через $\ddot{q}$, получим

$$\ddot{q}+\frac{R}{L}\dot{q}+\frac{1}{LC}q=0. \qquad (100.1)$$

Учтя, что $\frac{1}{LC}$ равно квадрату собственной частоты контура ω_0 [см. формулу (99.2)], и введя обозначение

$$\beta=\frac{R}{2L}, \qquad (100.2)$$

уравнению (100.1) можно придать вид

$$\ddot{q}+2\beta\dot{q}+\omega_0^2 q=0. \qquad (100.3)$$

Свободные затухающие колебания

[см. т. I, формулу (73.2)]. При условии, что $\beta^2 < \omega_0^2$, т. е. $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, решение уравнения (100.3) имеет вид

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \tag{100.4}$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Подставляя значение (99.2) для ω_0 и (100.2) для β, находим, что

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \tag{100.5}$$

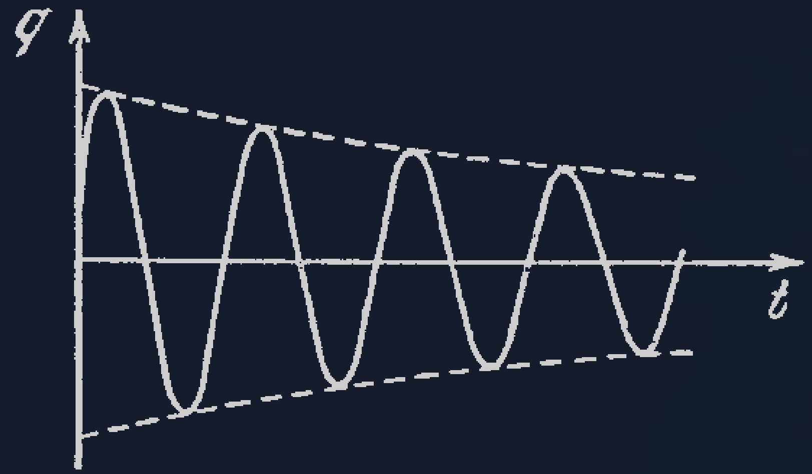
Таким образом, частота затухающих колебаний меньше собственной частоты ω_0. При $R = 0$ выражение (100.5) переходит в (99.2).

Разделив (100.4) на емкость C, получим напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q_{m0}}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) = U_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \tag{100.6}$$

Чтобы найти силу тока, продифференцируем (100.4) по времени:

$$i = \dot{q} = q_{m0} e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha)].$$



Декремент затухания

Затухание колебаний принято характеризовать логарифмическим декрементом затухания [см. т. I, формулу (73.12)]

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T,$$

где $a(t)$ — амплитуда соответствующей величины (q, U или i). Легко проверить, что логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний N_e, совершаемых за время, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз:

$$\lambda = \frac{1}{N_e}.$$

Добротность колебательного контура

Колебательный контур часто характеризуют его **добротностью** Q, которая определяется как величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e. \tag{100.8}$$

Из (100.8) следует, что добротность контура тем выше, чем большее число колебаний успевает совершиться прежде, чем амплитуда уменьшится в e раз. Взяв вместо λ его значение βT, получим

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{1}{2\beta}\left(\frac{2\pi}{T}\right) = \frac{\omega}{2\beta}.$$

Если затухание невелико ($\beta^2 \ll \omega_0^2$), можно положить $\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Тогда

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

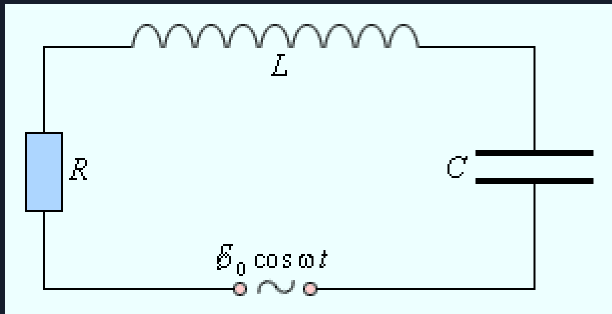
[согласно (100.2) $2\beta = R/L$]. Таким образом, в случае несильного затухания

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{100.9}$$

Апериодическое затухание

В заключение отметим, что при $\beta^2 \geqslant \omega_0^2$, т. е. $\frac{R^2}{4L^2} \geqslant \frac{1}{LC}$, вместо колебаний происходит апериодический разряд конденсатора. Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется *критическим*. Значение критического сопротивления $R_к$ определяется условием $\frac{R_к^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$, откуда

$$R_к = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (100.11)$$



Вынужденные электрические колебания

Приравняем сумму падений напряжения на элементах контура приложенному напряжению

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = U_m \cos \omega t.$$

Перейдя от тока i к заряду q и использовав обозначения (99.2) и (100.2), получим уравнение

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L}\cos \omega t,$$

Резонанс

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \qquad (101.1)$$

где

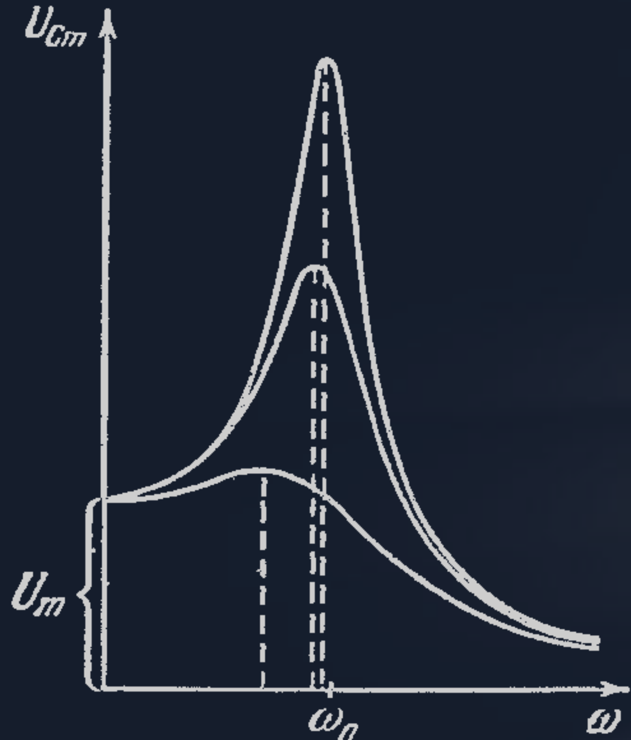
$$q_m = \frac{\left(\frac{U_m}{L}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

$$q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \qquad (101.2)$$

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{U_m}{\omega C\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (101.4)$$

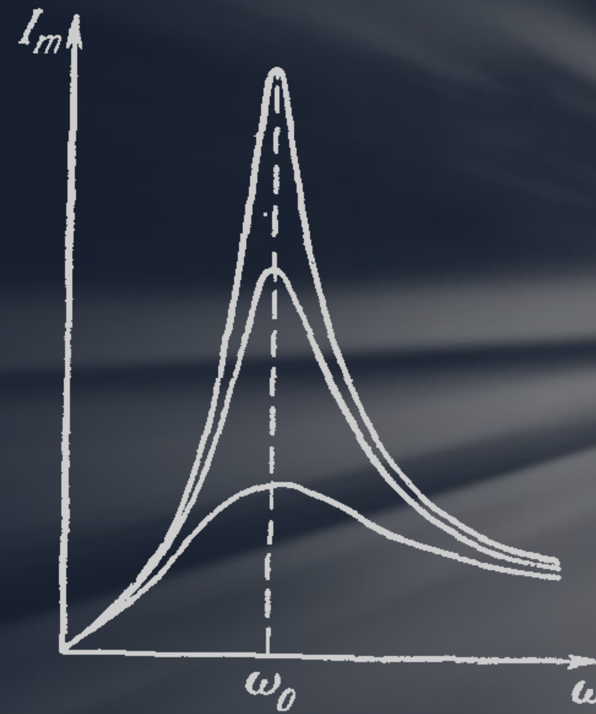
$$I_m = \omega q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \qquad (101.6)$$

Резонанс напряжений и токов

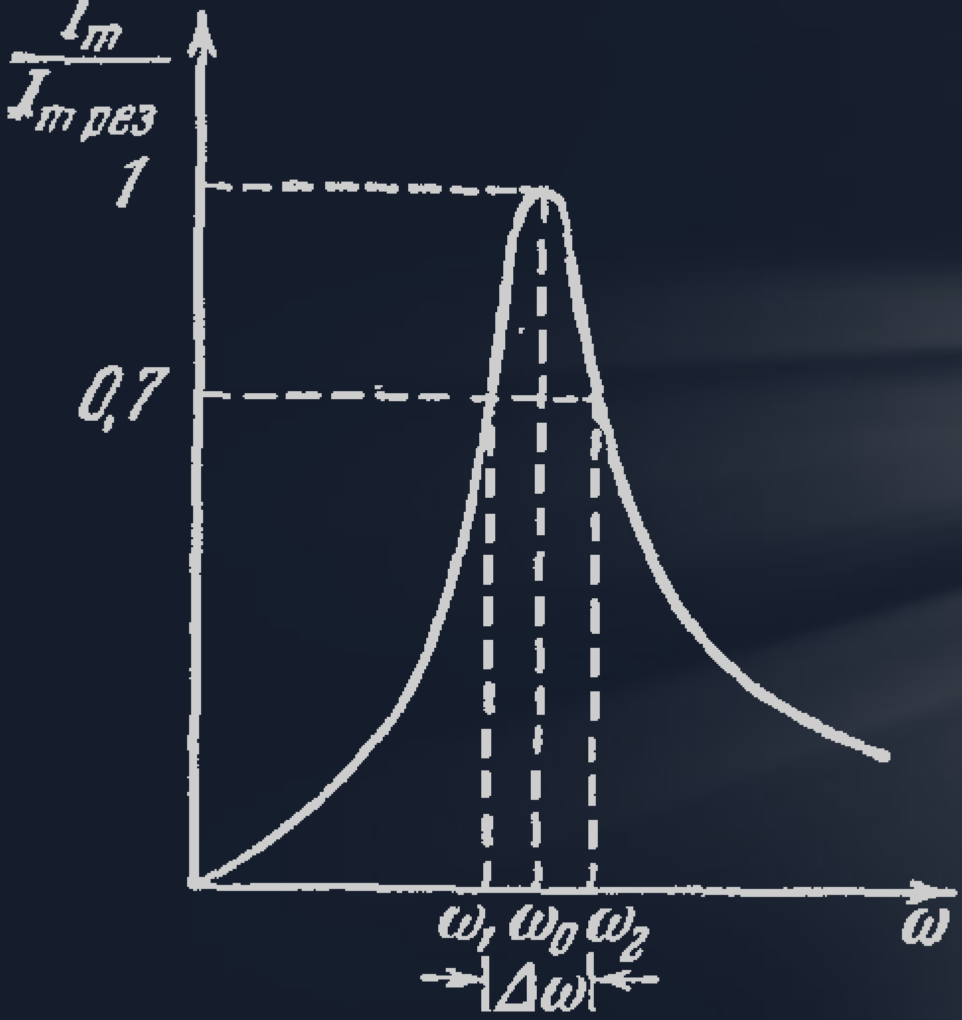


Резонансная частота для заряда q и напряжения на конденсаторе U_C равна [см. т. I, формулу (75.11)]

$$\omega_q = \omega_U = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leqslant \omega_0. \quad (101.7)$$

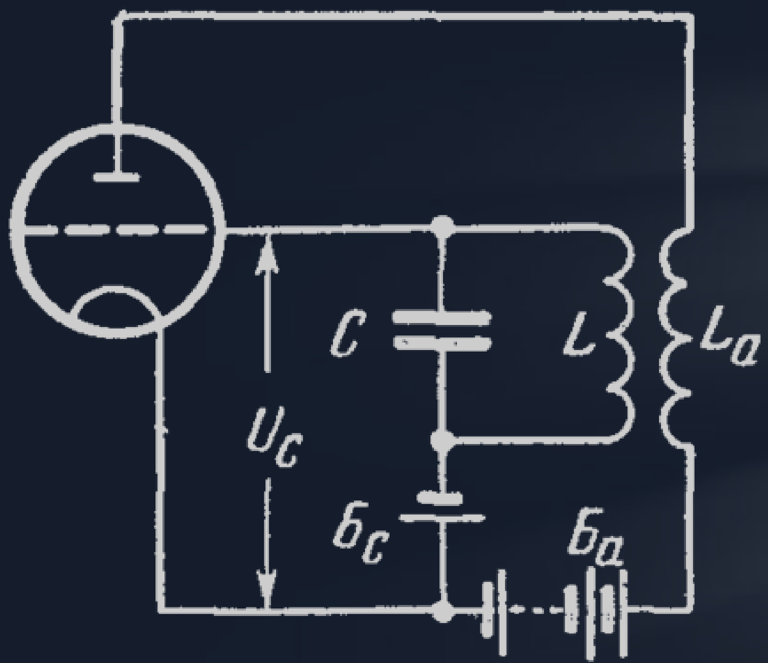


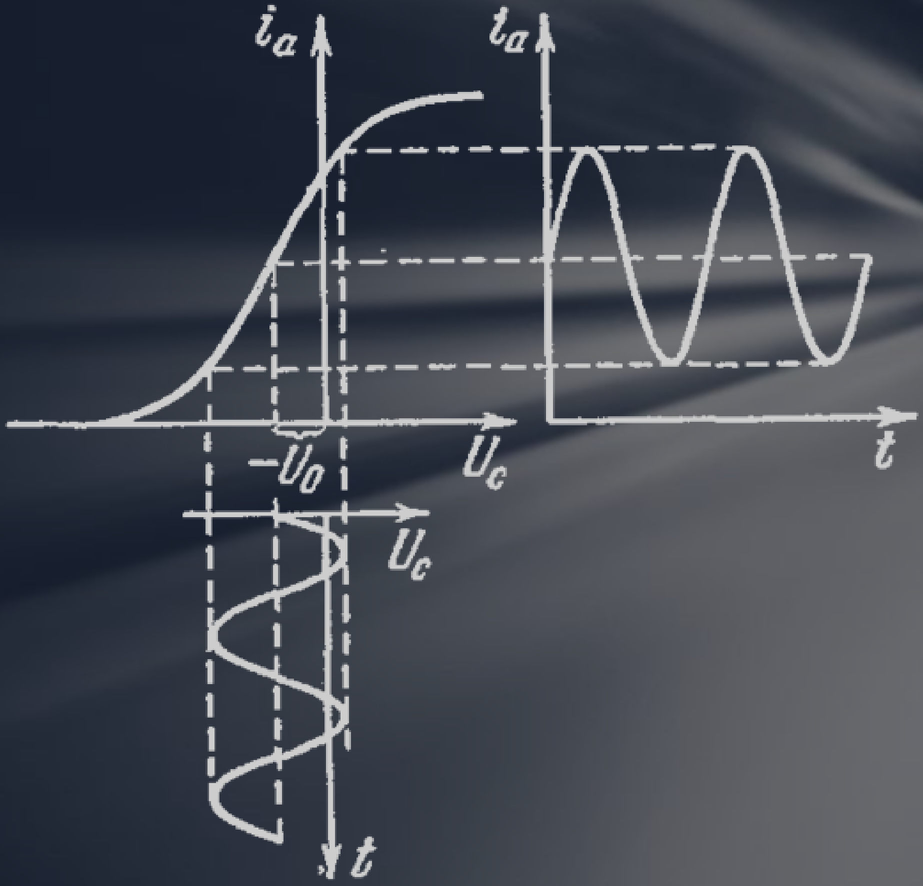
Ширина резонанса и добротность



$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{1}{Q}.$$

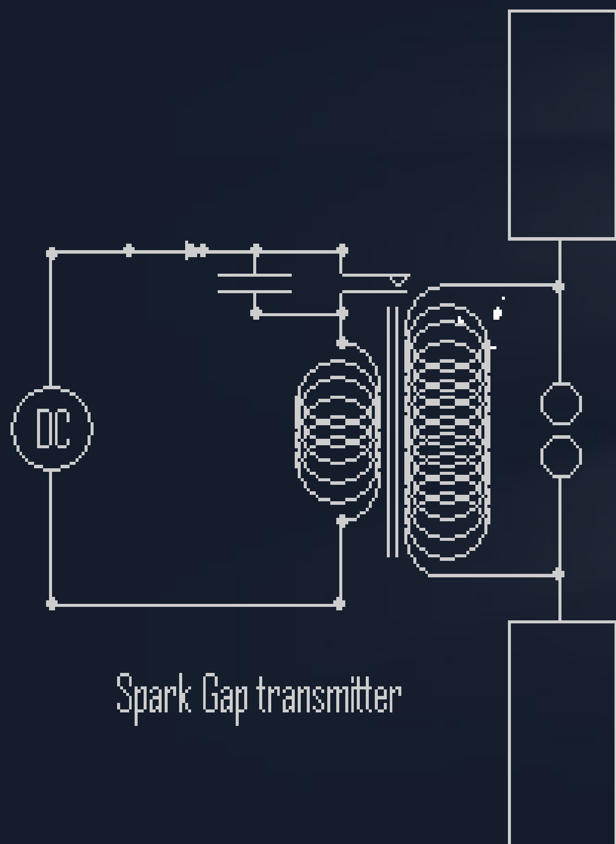
Автогенератор

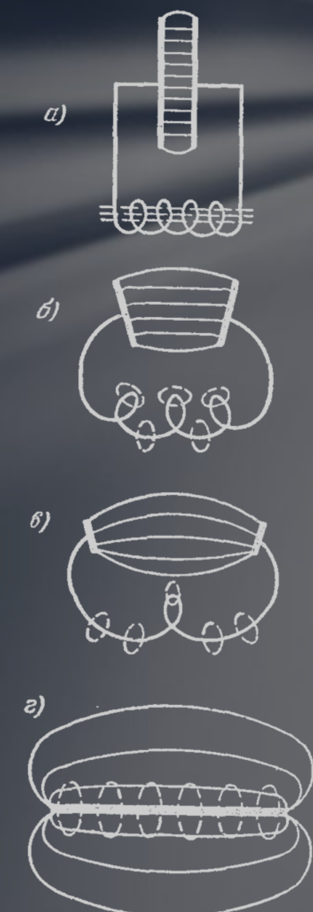




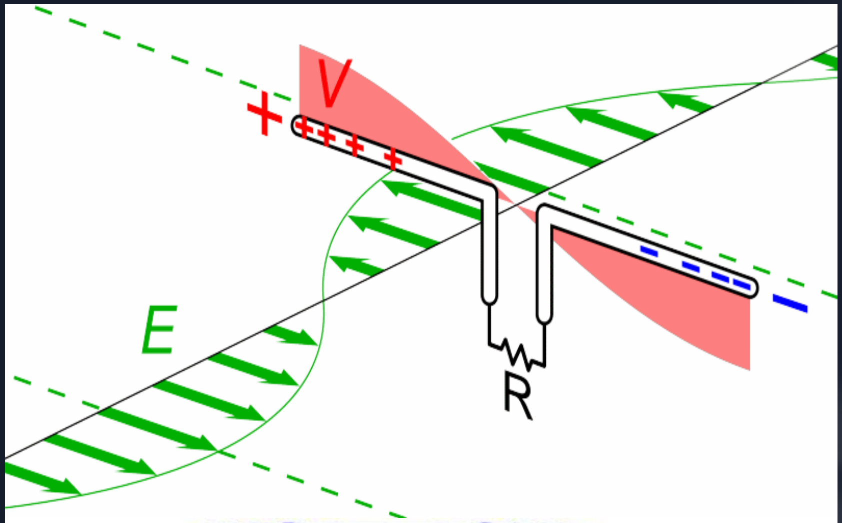
Экспериментальное исследование электромагнитных волн

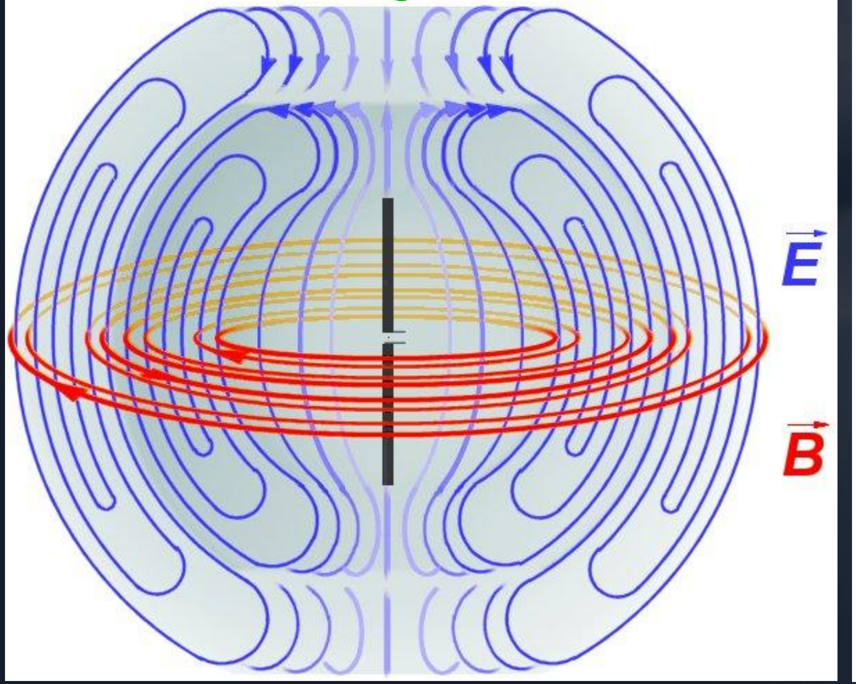
Экспериментальная проверка вывода теории Максвелла о существовании электромагнитных волн была осуществлена Герцем в 1888 г. Для получения волн Герц применил изобретенный им вибратор, состоящий из двух стержней, разделенных искровым промежутком

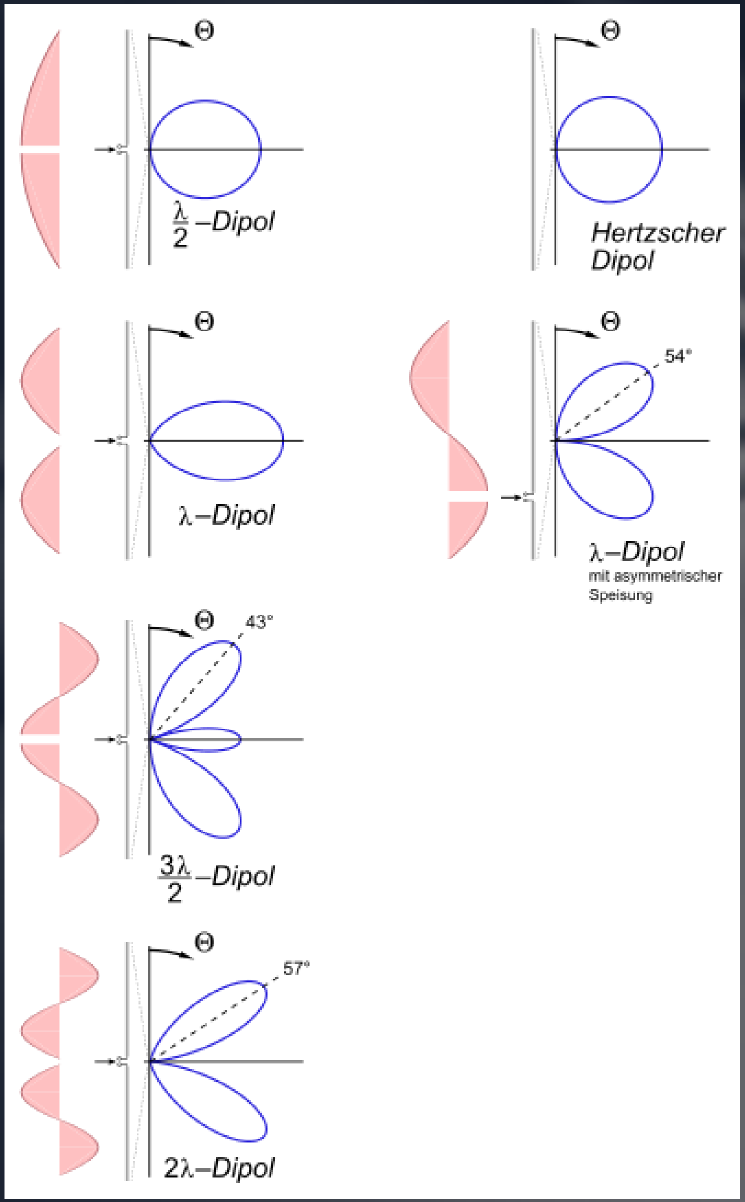




Диполь Герца

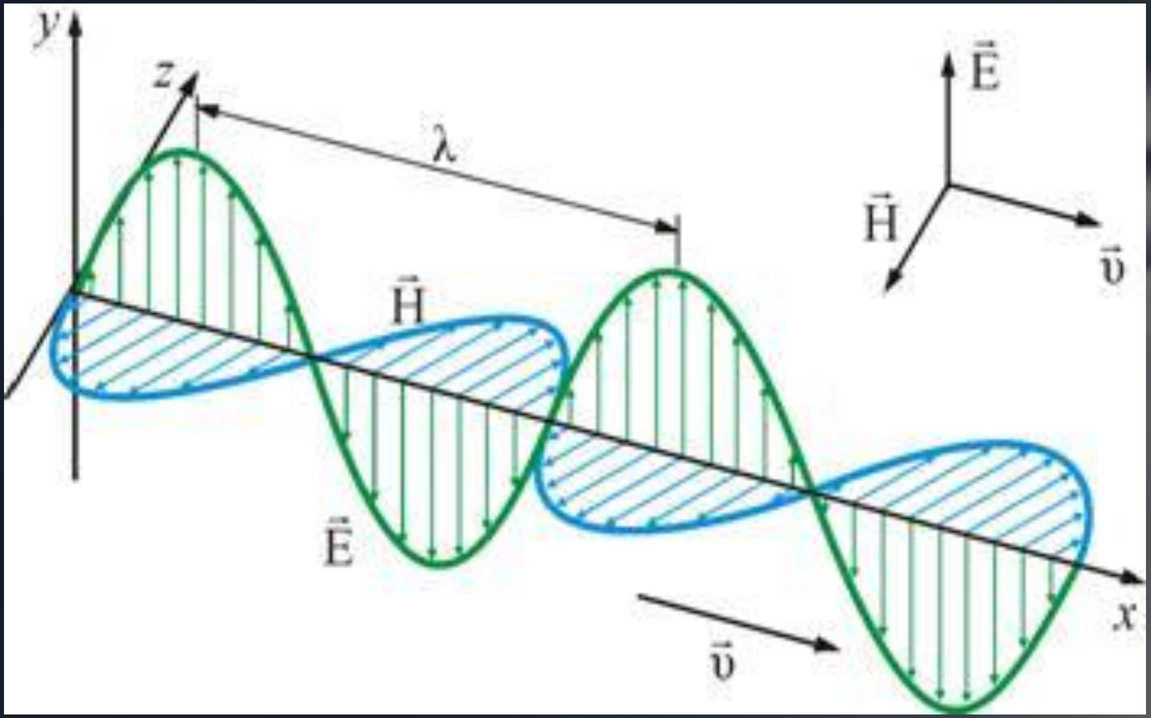




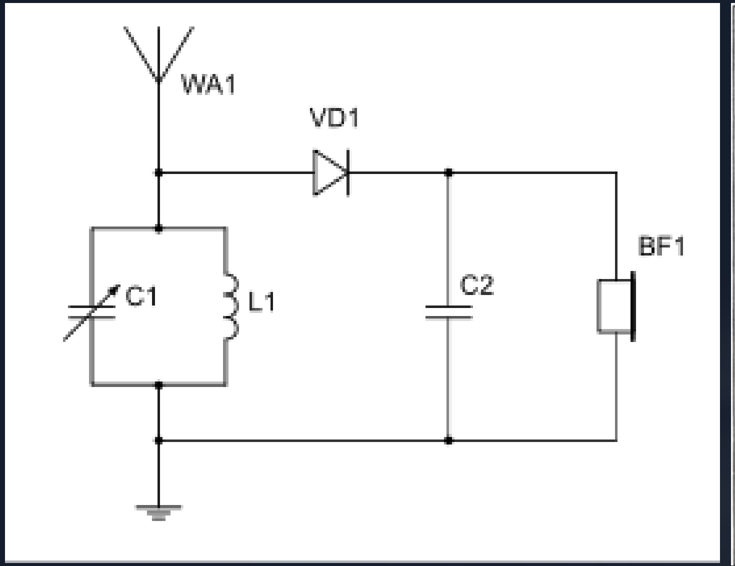


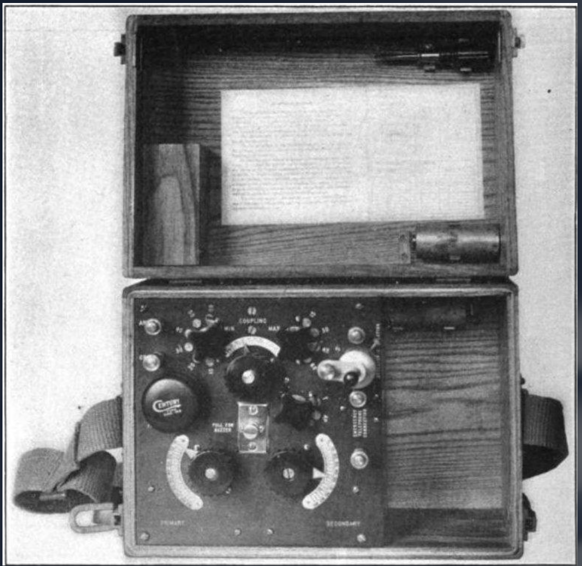
Плоская электромагнитная волна

Плоская монохроматическая линейно поляризованная волна электромагнитная волна, распространяющаяся в направлении волнового вектора **k** с частотой **ω**



Детекторный радиоприемник





Штатный детекторный приёмник корпуса связи США во время Первой мировой войны.

«Окопное радио» — солдатская самоделка времен Первой мировой войны.

Медицинские устройства в использующие электромагнитные волны

Магнетрон
(микроволновая терапия
СВЧ 2,375 ГГц и КВЧ)

Синхротронное излучение в медицине -
новое поколение сверхярких источников
рентгеновского излучения