

Физические методы как объективные методы исследования в живой природе. Гармонические колебания.

лекция №1

для студентов 1 курса, обучающихся по специальности
31.05.02 - Педиатрия

К.п.н., доцент Шилина Н.Г.
Красноярск, 2019

Цель лекции:

- Ознакомить обучающихся с основными характеристиками гармонических колебаний и возможностями Фурье-анализа в медико-биологической практике.

План лекции

- Типы колебаний (свободные: гармонические и затухающие, вынужденные, автоколебания).
- Основные характеристики колебания
- Коэффициент и логарифмический декремент затухания
- Сложение гармонических колебаний, происходящих по одной прямой.
- Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.
- Гармонический анализ (Фурье-анализ)

Физические методы как объективные методы исследования в живой природе. Значение для медицины.

Физика – наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи и законы ее движения.

Физические методы исследования:

- 1) наблюдение;
- 2) эксперимент;
- 3) создание гипотез

Физическими законами становятся лишь те теоретические предсказания, которые подтверждаются экспериментом.

Биофизика выделилась в отдельную науку, так как ее объект - живой организм - не допускает ни произвольных гипотез, ни жестких очисток, ни мощных воздействий.

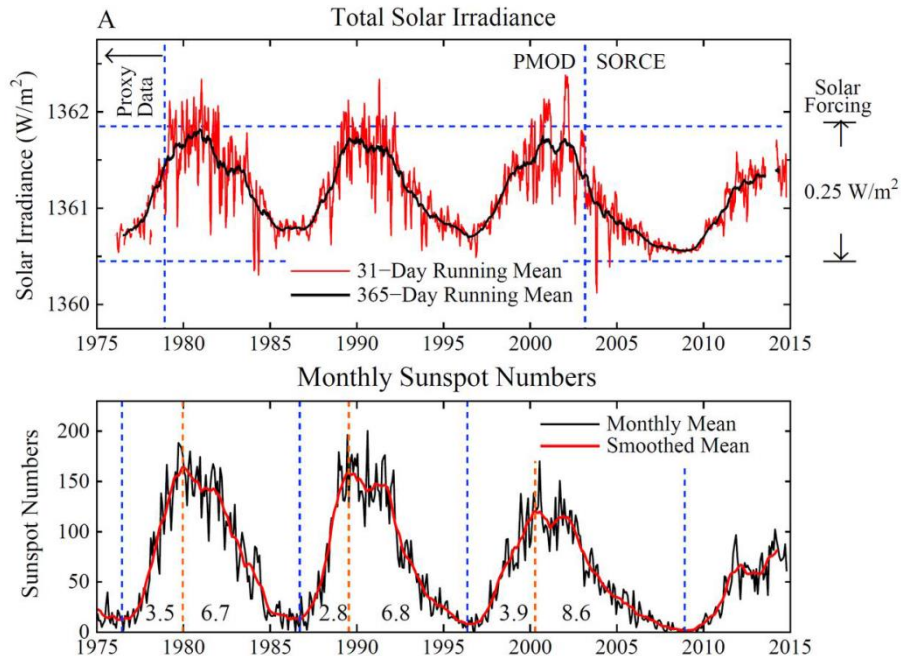
Физические методы как объективные методы исследования в живой природе. Значение для медицины.

Биофизика – наука о наиболее простых и фундаментальных взаимодействиях, лежащих в основе биологических явлений. На основе физики можно объяснить все процессы в живом организме вплоть до работы механизма наследственности.

Каждое открытие физики обогащает медицину новыми приборами и аппаратами, дающими возможность усовершенствовать существующие или ввести в практику новые методы диагностики и лечения. Целый ряд тонких объективных диагностических методик, как, например, электрокардиография, электроэнцефалография и др., медицина получила только в связи с развитием электронно-усилительной техники. Развитие техники высоких и ультравысоких частот обогатило физиотерапию целым рядом новых эффективных методик, таких, например, как УВЧ-терапия, СМВ- и ДМВ-УВЧ-терапия.

Свободные колебания

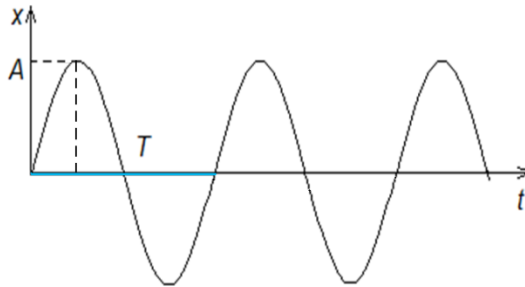
Колебания – это движения или изменение состояния, обладающее той или иной степенью повторяемости.



Свободные колебания

Свободными собственными механическими колебаниями называют колебания, совершающиеся за счет первоначально полученной энергии.

Гармоническими называют колебания, при которых исследуемая величина изменяется во времени по закону синуса или косинуса.

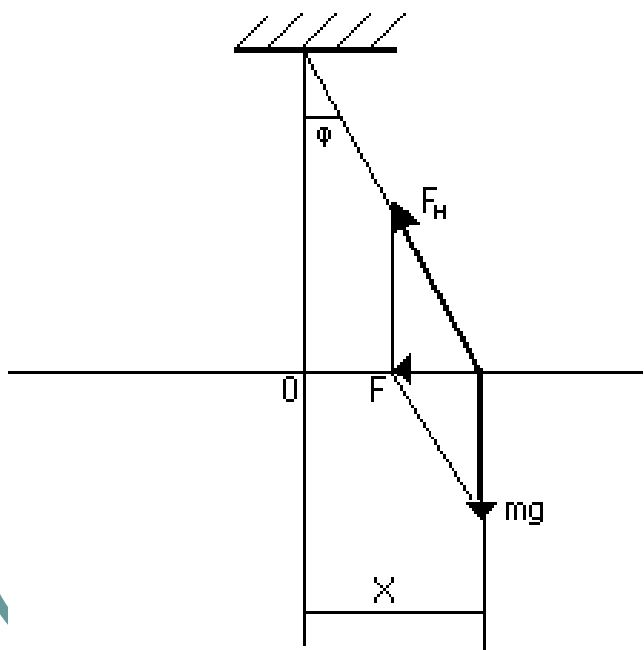


Характеристики колебания

- **Амплитуда (A)** – это максимальное смещение тела от положения равновесия
- **Период (T)** – это время одного полного колебания
- **Циклическая частота (ω_0)**– это число колебаний, совершенных за 2π секунд ($\omega_0 = 2\pi\nu$)
- **Фаза ($\omega_0 t + \varphi_0$)** колебания показывает какая доля периода прошла от начала колебания. Здесь φ_0 – начальная фаза

Математический маятник

Математическим маятником называют материальную точку, подвешенную на тонкой, нерастяжимой и невесомой нити.



$$F = -P \cdot \operatorname{tg} \varphi = mg \cdot \operatorname{tg} \varphi = -mg \frac{X}{L}$$

$$ma = -mg \frac{X}{L}$$

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -mg \frac{X}{L}$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + g \frac{X}{L} = 0$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega_0^2 X = 0 \quad \text{где} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{L}$$

Квазиупругая сила

Силы, неупругие по природе, но аналогичные по свойствам силам, возникающим при малых деформациях упругих тел, называют **квазиупругими**.

$$F = -kx$$

Дифференциальное уравнение незатухающих колебаний (пружинный маятник)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x'' + \omega_0^2 x = 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

Решение

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

или

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

где **x** - **смещение** от положения равновесия;
 $(\omega_0 t + \varphi_0)$ - **фаза** колебания;
 φ_0 - начальная фаза;
 ω_0 - **собственная (циклическая) частота**

Скорость и ускорение при гармонических колебаниях

- Пусть материальная точка совершает гармонические колебания по закону:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

- Скорость движения точки равна:

$$V = \frac{dx}{dt} = (A \sin(\omega t + \varphi_0))' = A \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

- Амплитуда изменения скорости – $A \omega$

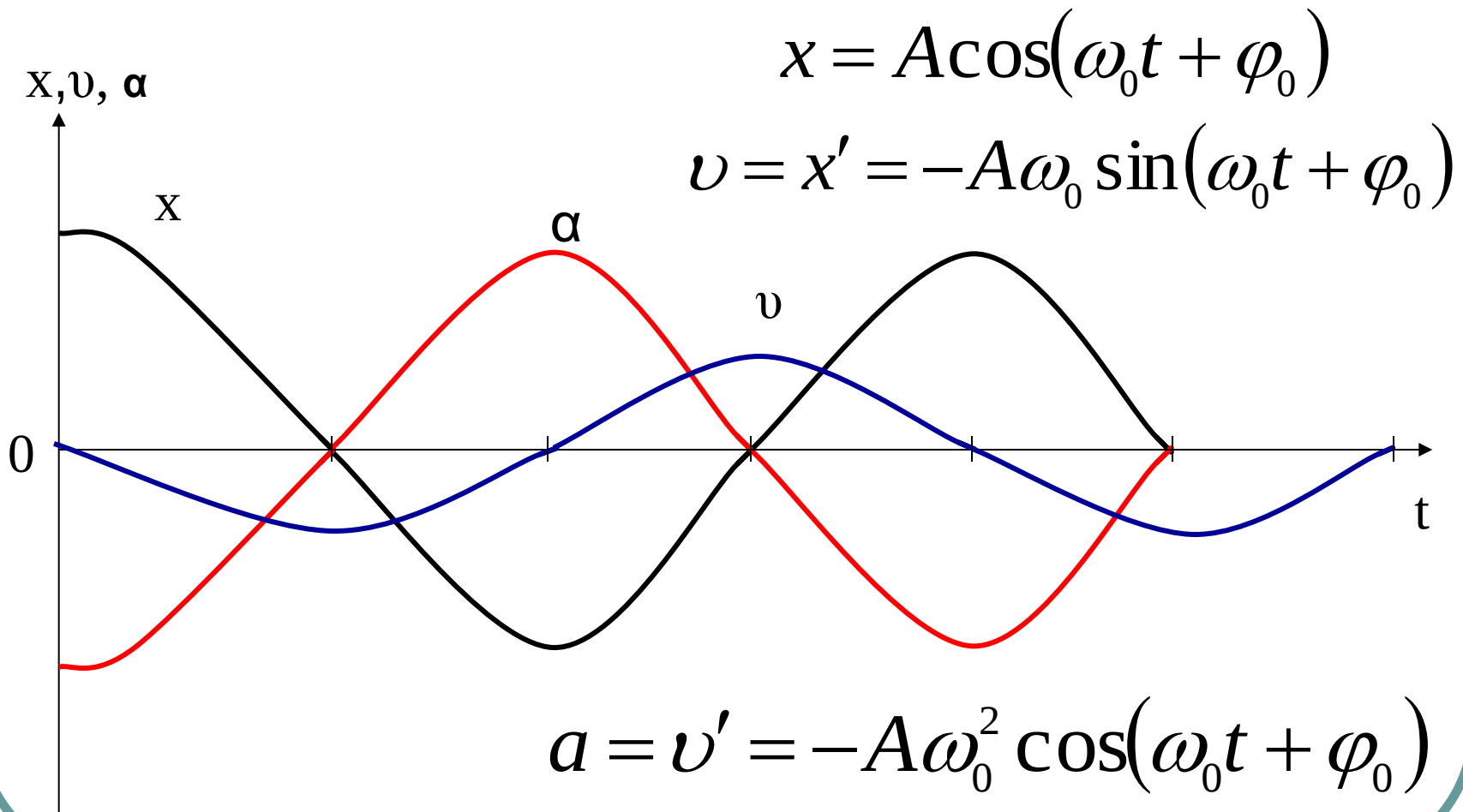
Скорость и ускорение при гармонических колебаниях

- Ускорение точки равно производной от скорости:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = (A\omega \cos(\omega t + \varphi_0))' = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

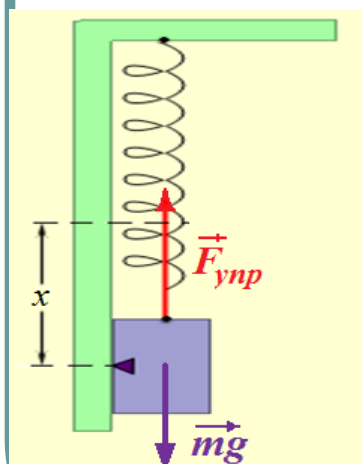
- Амплитуда изменения ускорения – $A\omega^2$.
- Таким образом, при механических колебаниях **координата, скорость и ускорение** меняются по гармоническому закону с одинаковой частотой.

Временные графические зависимости

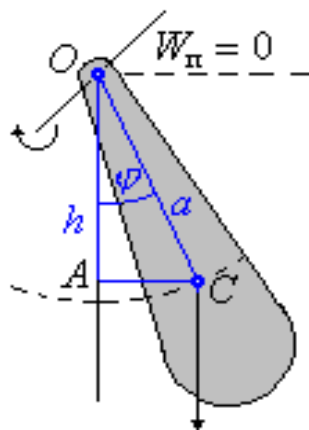


- Система, совершающая колебания, описываемые таким дифференциальным уравнением, называется **гармоническим осциллятором**.

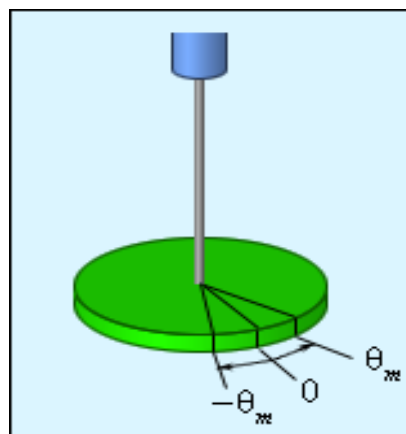
Примеры гармонических осцилляторов



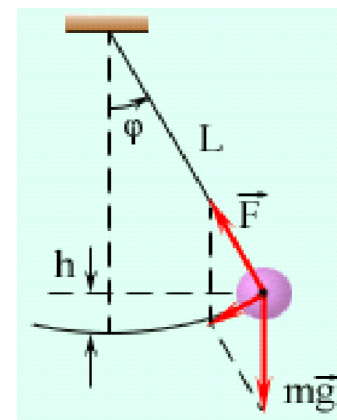
Пружинный



Физический



Крутильный



Математический

Кинетическая и потенциальная энергии незатухающего колебательного движения

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_n = \frac{1}{2} k x^2$$

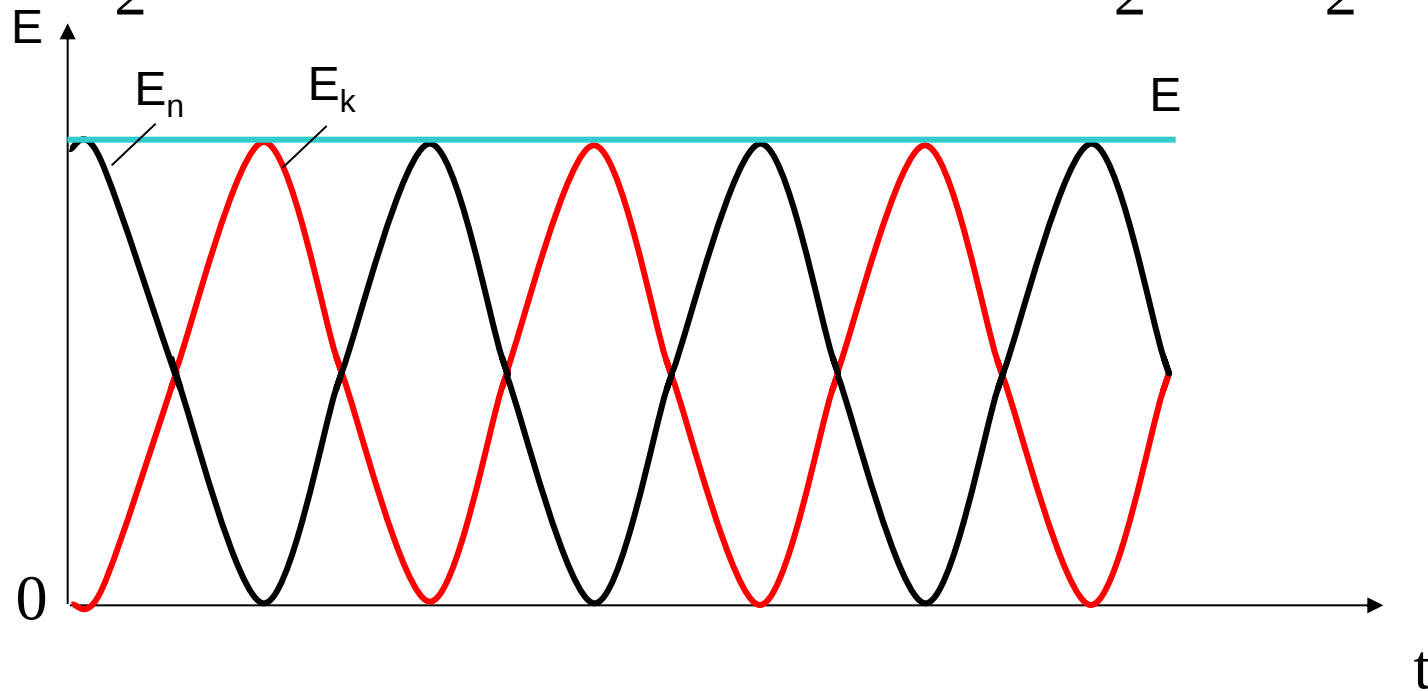
$$E_k = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$E_n = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Полная энергия незатухающих колебаний

$$\begin{aligned} E = E_k + E_i &= \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{1}{2} kA^2 [\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} mA^2 \omega_0^2 \end{aligned}$$



Затухающие колебания

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_{TP}$$

$$F_{TP} = -r v = -r \frac{dx}{dt}$$

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$2\beta = \frac{r}{m}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m};$$

β – коэффициент
затухания; ω_0 – круговая
частота собственных
колебаний системы.

Решение

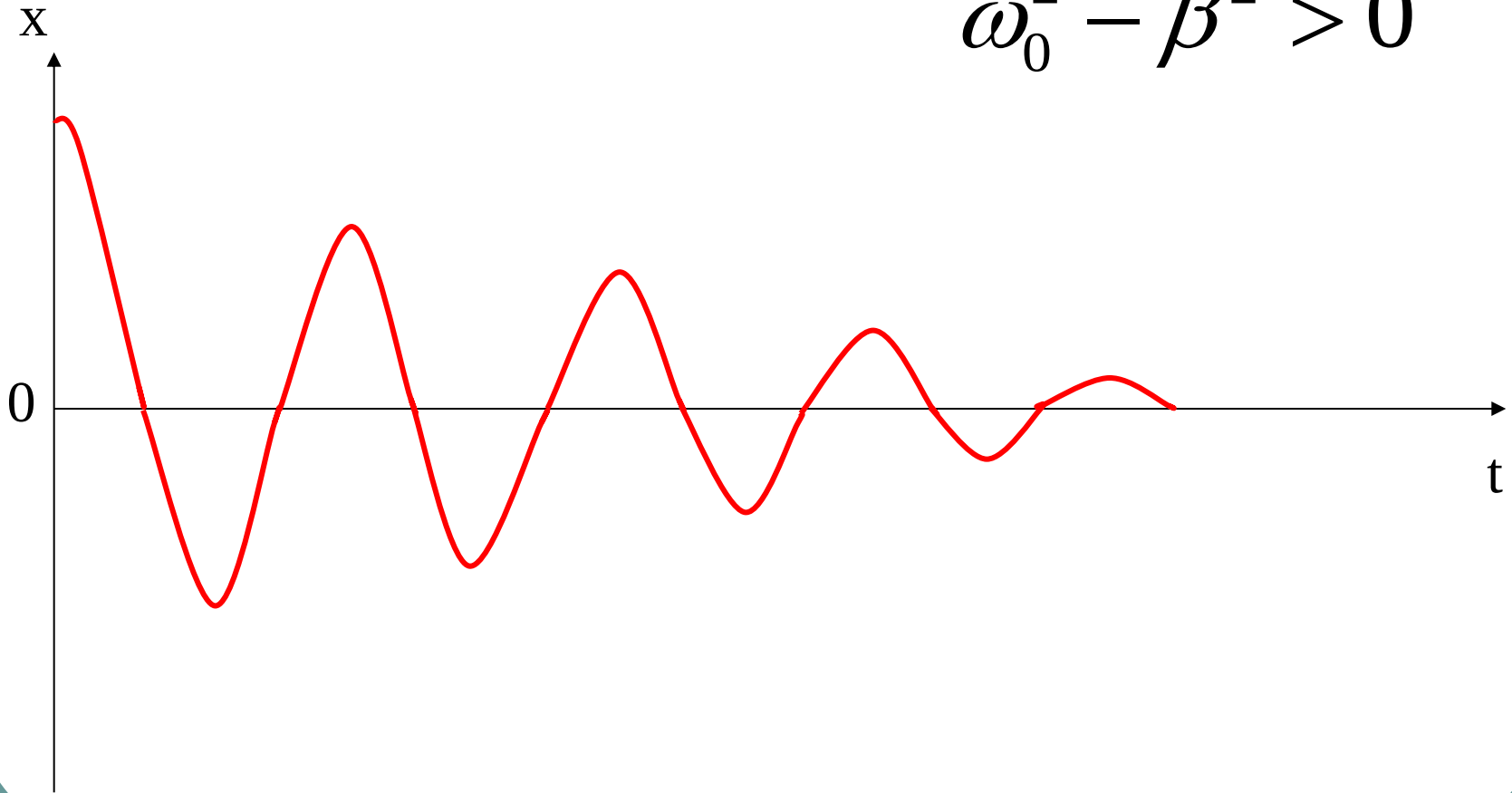
$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$A = \pm A_0 e^{-\beta t}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

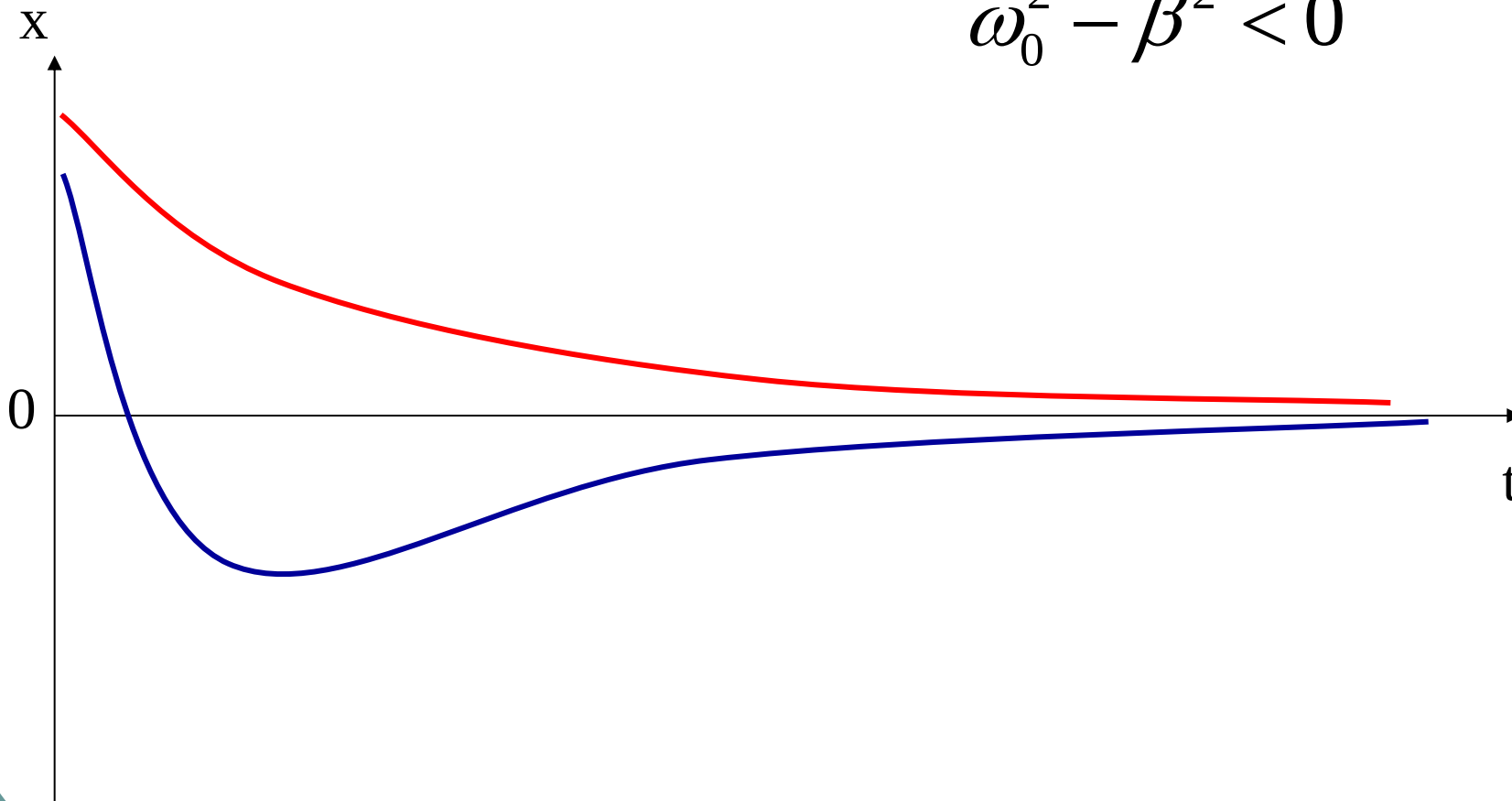
Временная графическая зависимость

$$\omega_0^2 - \beta^2 > 0$$



Апериодический процесс

$$\omega_0^2 - \beta^2 < 0$$



Логарифмический декремент затухания

Величина, численно равная натуральному логарифму отношения двух последовательных амплитуд колебаний, разделенных интервалом времени, равным периоду колебаний:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T}$$

$$\lambda = \beta T$$

Вынужденные колебания

Вынужденными колебаниями называются такие колебания, которые возникают в системе при участии внешней силы, изменяющейся по периодическому закону

$$F = F_0 \cos \omega t$$

F_0 – амплитуда;

ω – круговая частота колебаний
вынуждающей силы

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

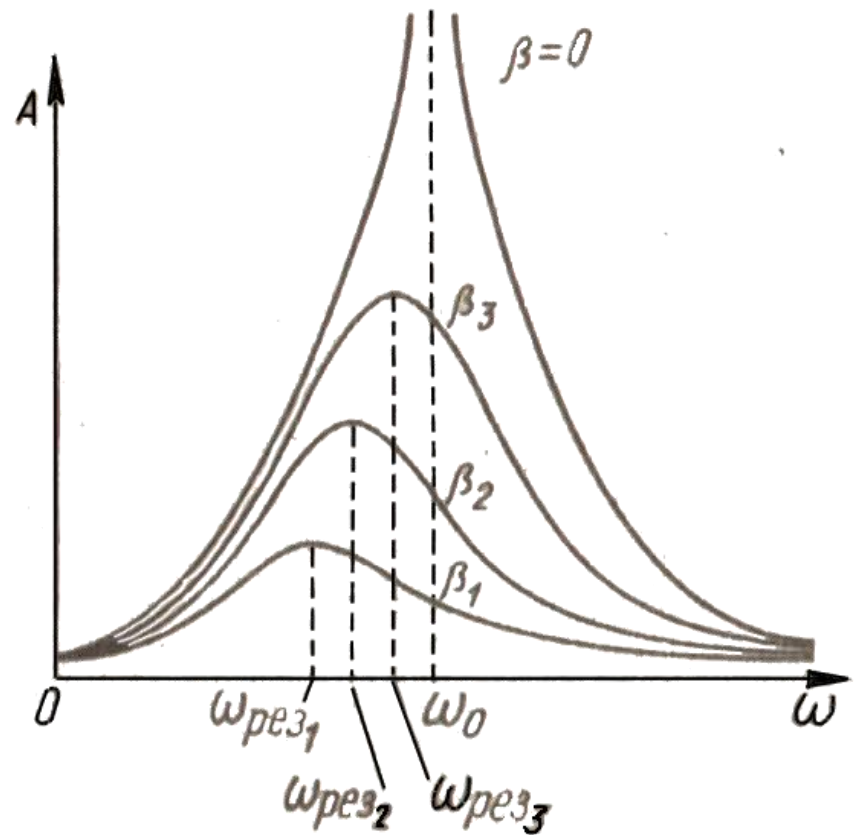
Решение

Сумма колебаний с амплитудой

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

Резонанс

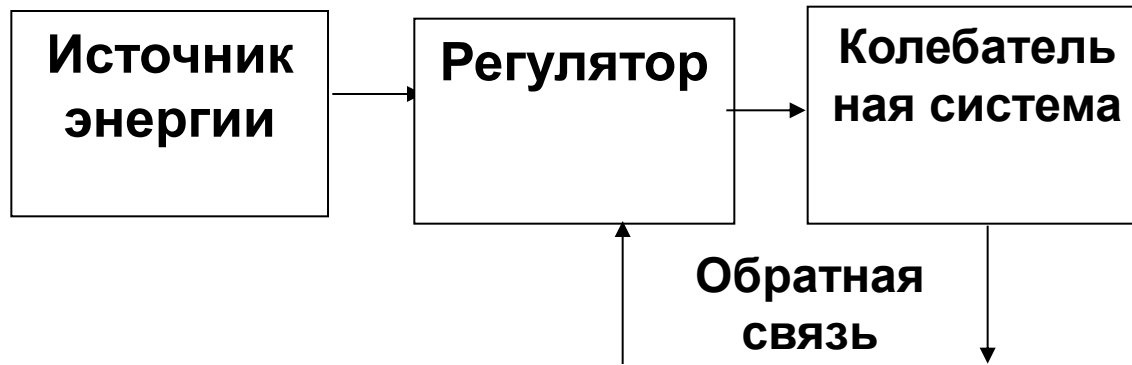
Амплитуда вынужденных колебаний имеет максимальное значение при некоторой определенной частоте вынуждающей силы, называемой *резонансной*



$$\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$$

Автоколебания

Незатухающие колебания, существующие в какой-либо системе при отсутствии переменного внешнего воздействия, называются автоколебаниями, а сами системы – автоколебательными



Сложение колебаний

Сложение гармонических колебаний, направленных по одной прямой

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_{01}t + \varphi_{01})$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_{02}t + \varphi_{02})$$

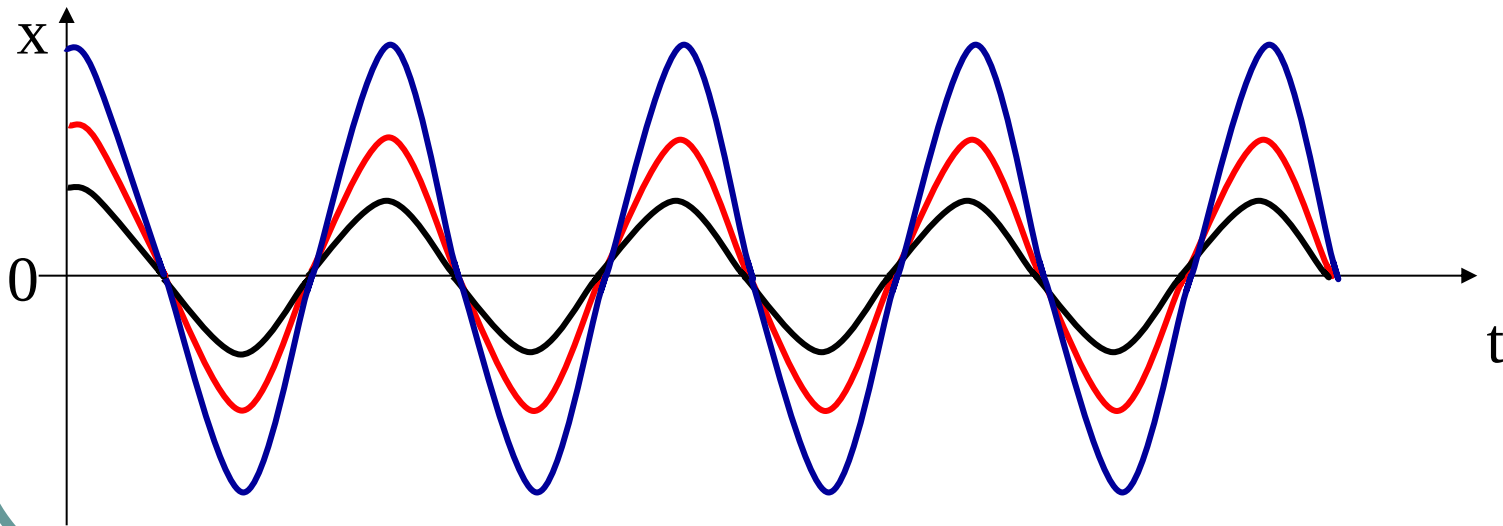
$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_{01}t + \varphi_{01}) + A_2 \cos(\omega_{02}t + \varphi_{02})$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}$$

Частные случаи

1) $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 2k\pi$, $\cos 2k\pi = +1$, где $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$$

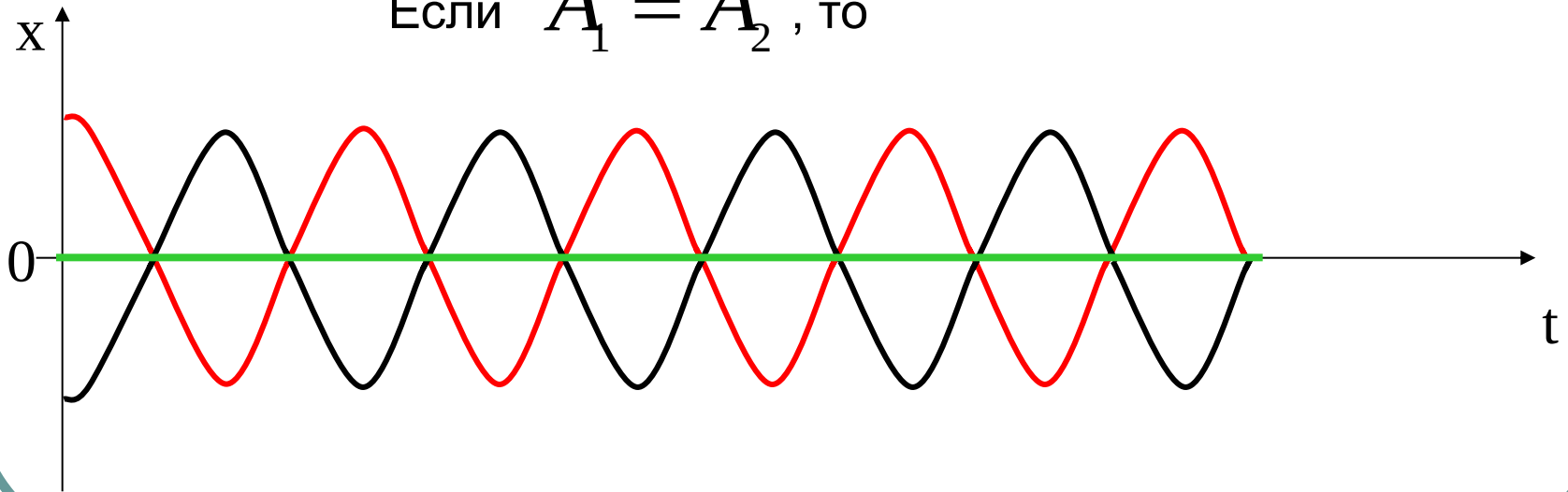


Частные случаи

$$2) \varphi_{02} - \varphi_{01} = (2k + 1)\pi, \cos(2k + 1)\pi = -1,$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|,$$

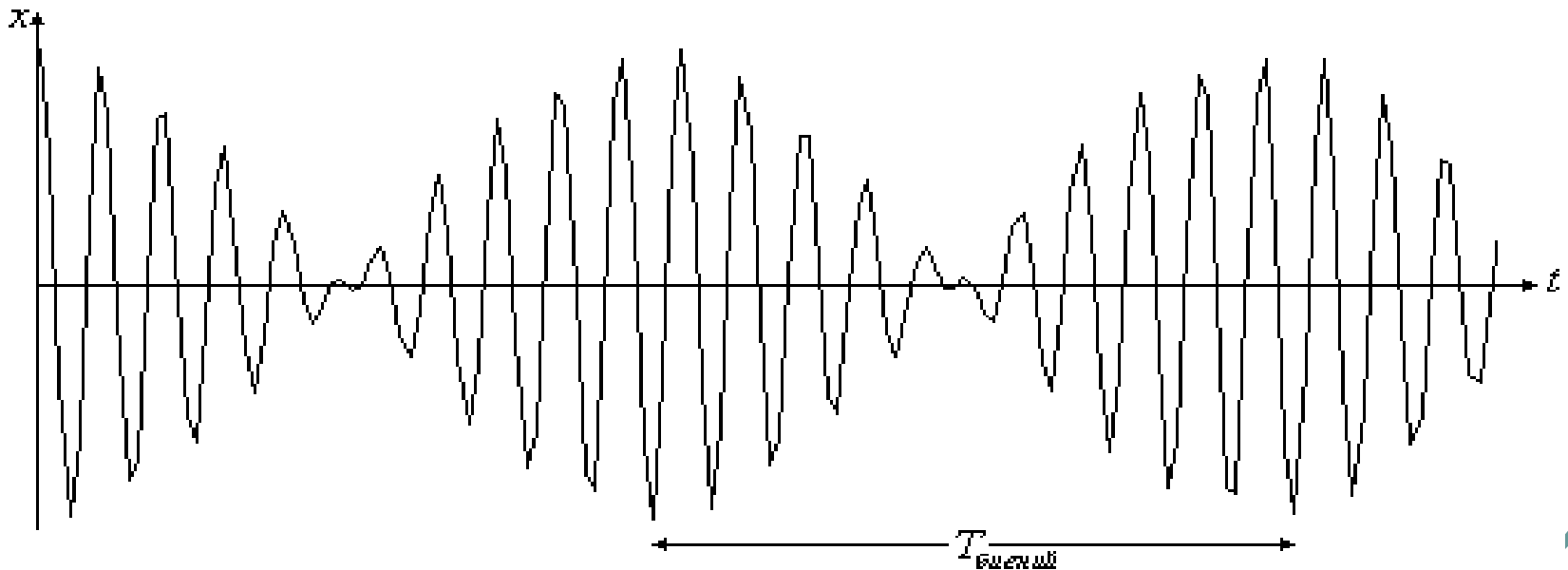
Если $A_1 = A_2$, то



Биения

Если частоты колебаний близки, наблюдаются **биения**. Это колебания с периодически меняющейся амплитудой

$$\omega_{01} \approx \omega_{02} \quad A_{\text{б}} = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right| \quad T_{\text{б}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$



Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}); \quad y = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{02})$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \sin^2(\varphi_{02} - \varphi_{01})$$

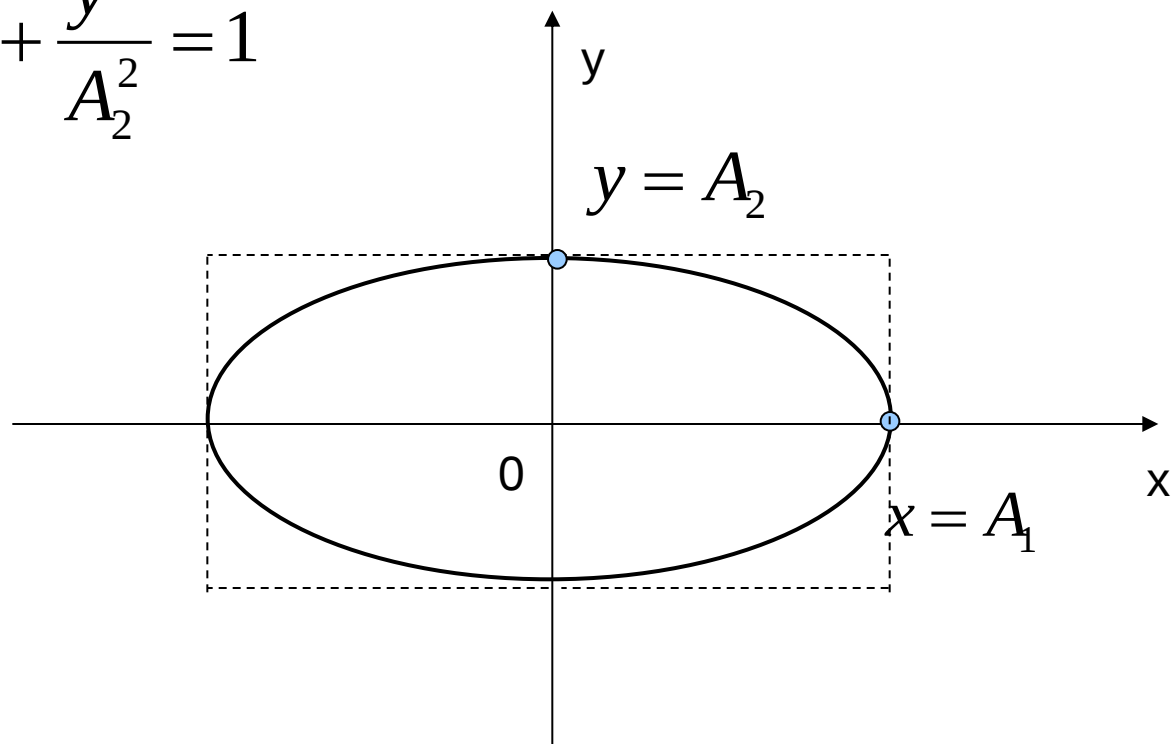
Частные случаи

$$\varphi_{02} - \varphi_{01} = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{где } k = 0, 1, 2, \dots;$$

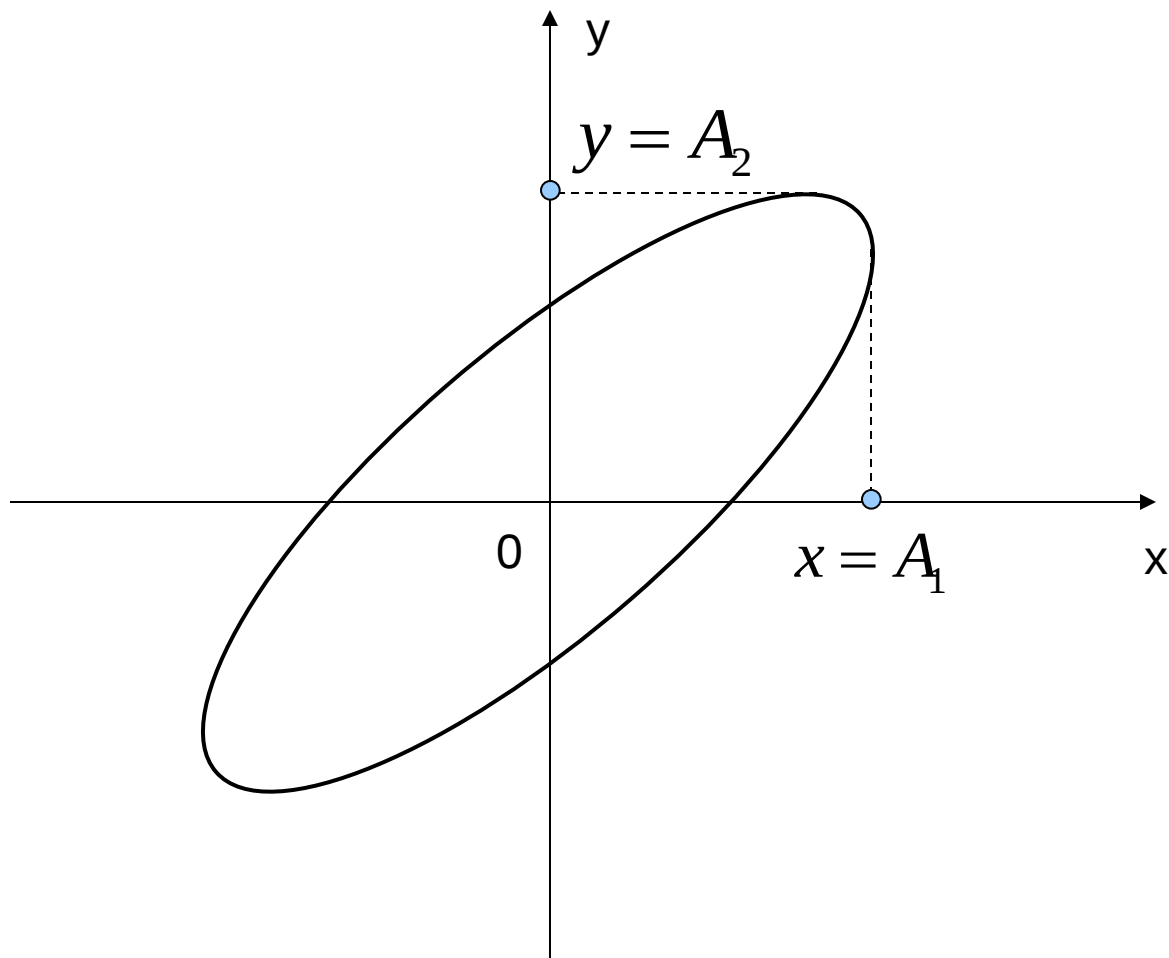
$$\cos\left[(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right] = 0, \quad \sin\left[(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right] = 1$$

Частные случаи

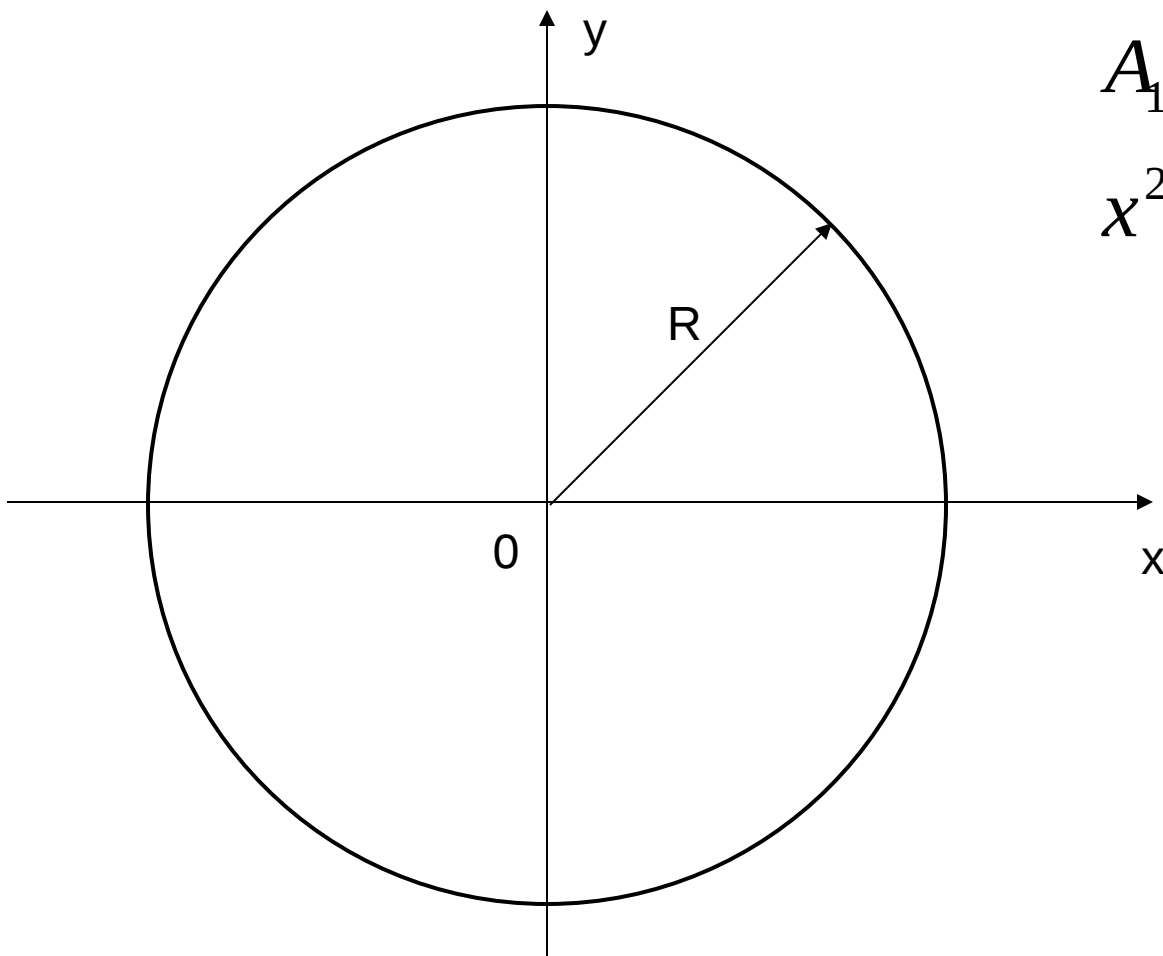
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$



Эллипс



Частные случаи



$$A_1 = A_2 = R$$

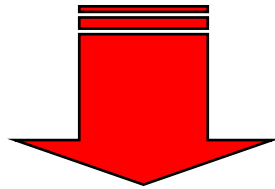
$$x^2 + y^2 = R^2$$

Частные случаи

$$\varphi_{02} - \varphi_{01} = k\pi, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots; \cos k\pi = \pm 1, \sin^2 k\pi = 0$$

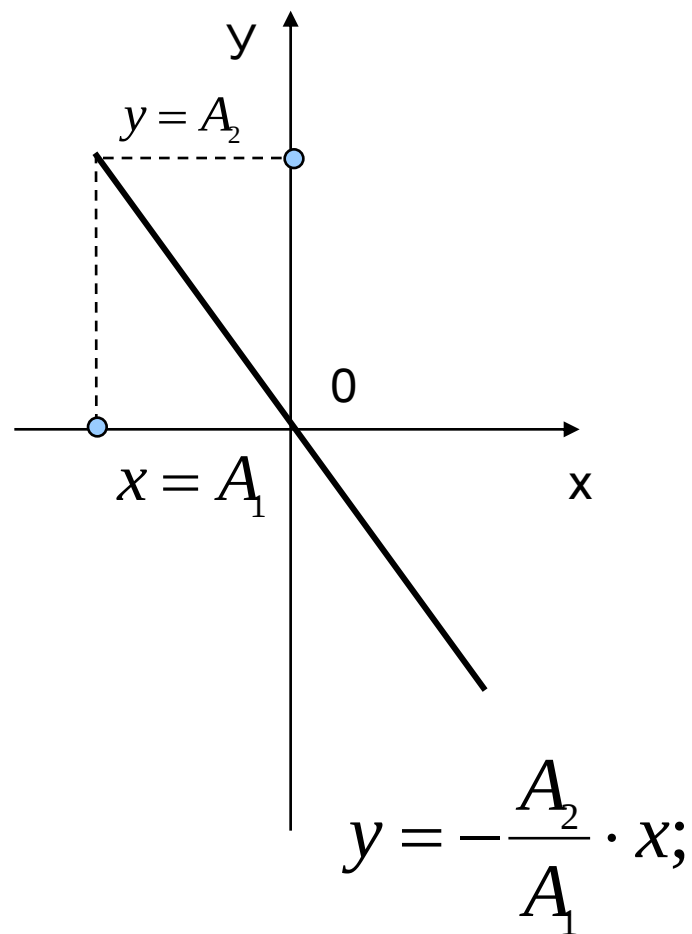
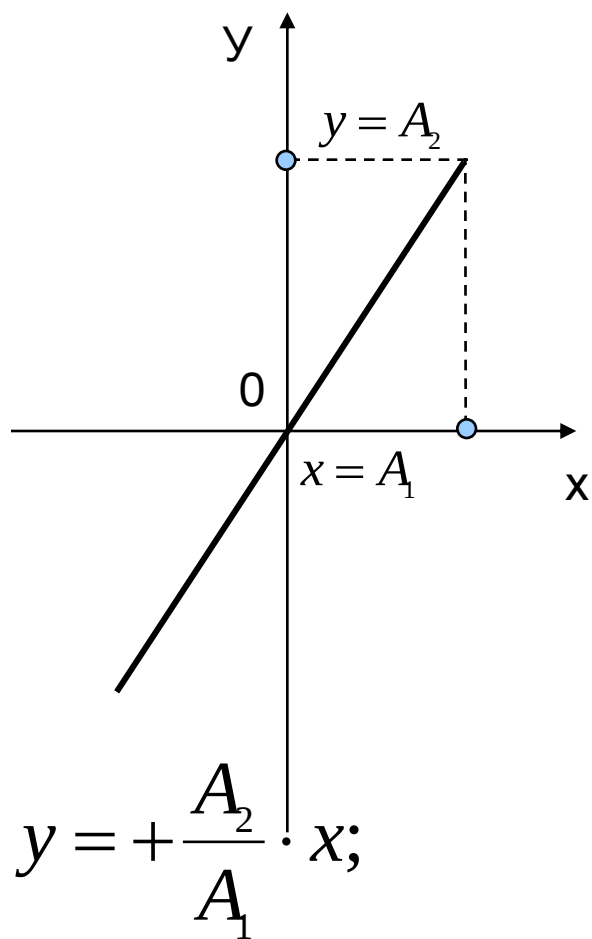
и тогда

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} \pm 2 \frac{xy}{A_1 A_2} = 0$$



$$\left(\frac{x}{A_1} \pm \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0; \quad \frac{x}{A_1} \pm \frac{y}{A_2} = 0; \quad y = \pm \frac{A_2}{A_1} \cdot x;$$

График прямой



Фигуры Лиссажу

В зависимости от отношения
частот

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}$$

и разности начальных
фаз

$\varphi_{01} - \varphi_{02}$ слагаемых колебаний

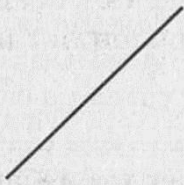
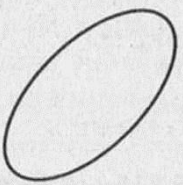
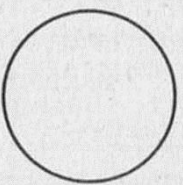
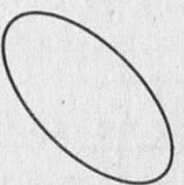
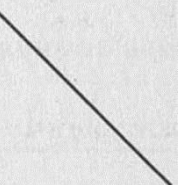
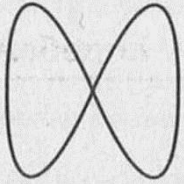
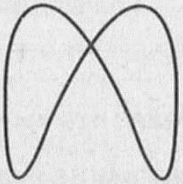
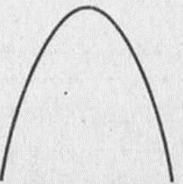
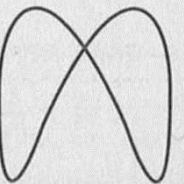
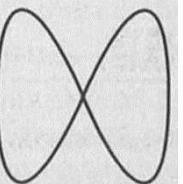
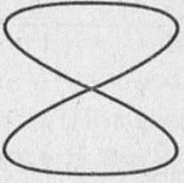
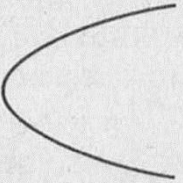
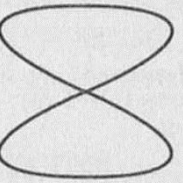
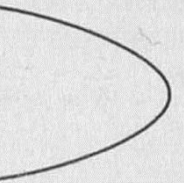
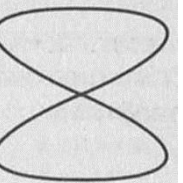
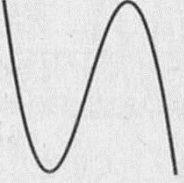
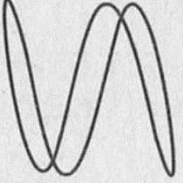
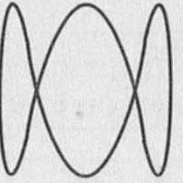
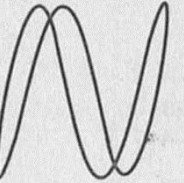
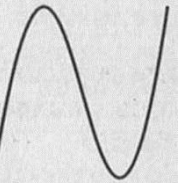
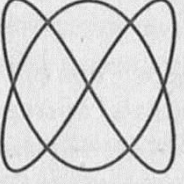
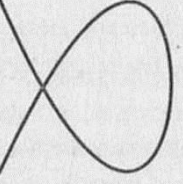
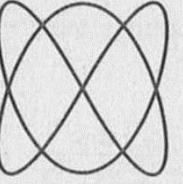
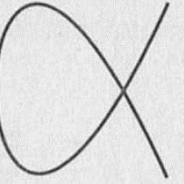
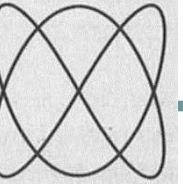
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}, \quad \varphi_{01} - \varphi_{02} = 0;$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3}, \quad \varphi_{01} - \varphi_{02} = \frac{\pi}{2};$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}, \quad \varphi_{01} - \varphi_{02} = \frac{\pi}{2};$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{4}, \quad \varphi_{01} - \varphi_{02} = \frac{\pi}{2};$$

Фигуры Лиссажу

	$\alpha = 0$	$\alpha = \pi/4$	$\alpha = \pi/2$	$\alpha = 3\pi/4$	$\alpha = \pi$
1 : 1					
1 : 2					
2 : 1					
1 : 3					
2 : 3					

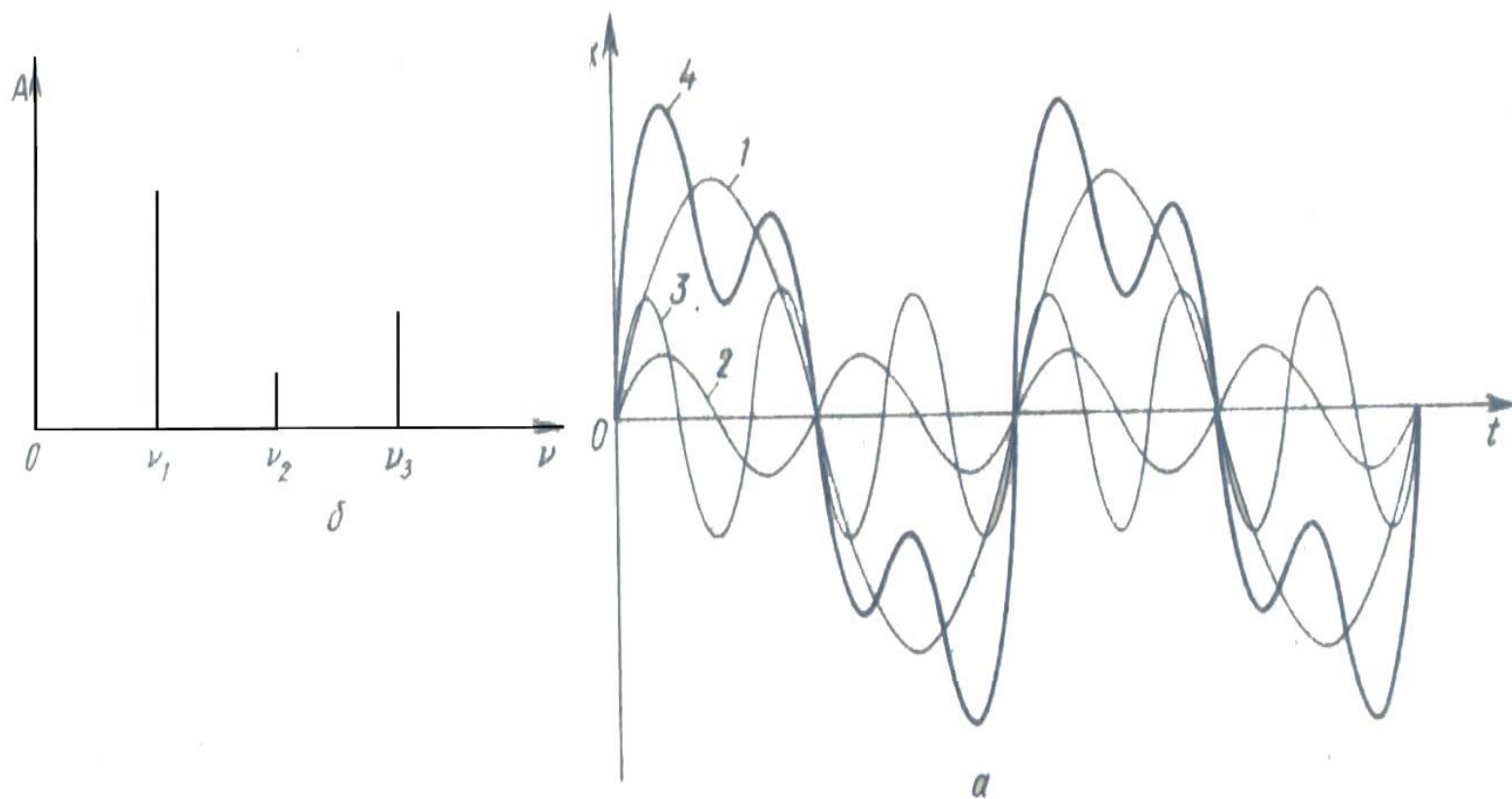
Сложение колебаний. Гармонический спектр сложного колебания

Фурье показал, что периодическая функция любой сложности может быть представлена в виде суммы гармонических функций, частоты которых кратны частоте сложной периодической функции

Совокупность гармонических колебаний, на которые разложено сложное колебание, называется **гармоническим спектром сложного колебания**

Спектр сложного колебания.

Сложное колебание





Красноярский
Государственный
Медицинский
Университет
им. проф.
В.Ф.Войно-Ясенецкого



**БЛАГОДАРЮ
ЗА ВНИМАНИЕ**

Ответьте на вопрос

- В воде происходят колебания двух маятников. Один изготовлен из свинца, а другой – из воска. Масса каждого маятника – 200 г. Что можно сказать о скорости затухания колебаний?

Уважаемые старосты!

Вы сдали списки
отсутствующих?