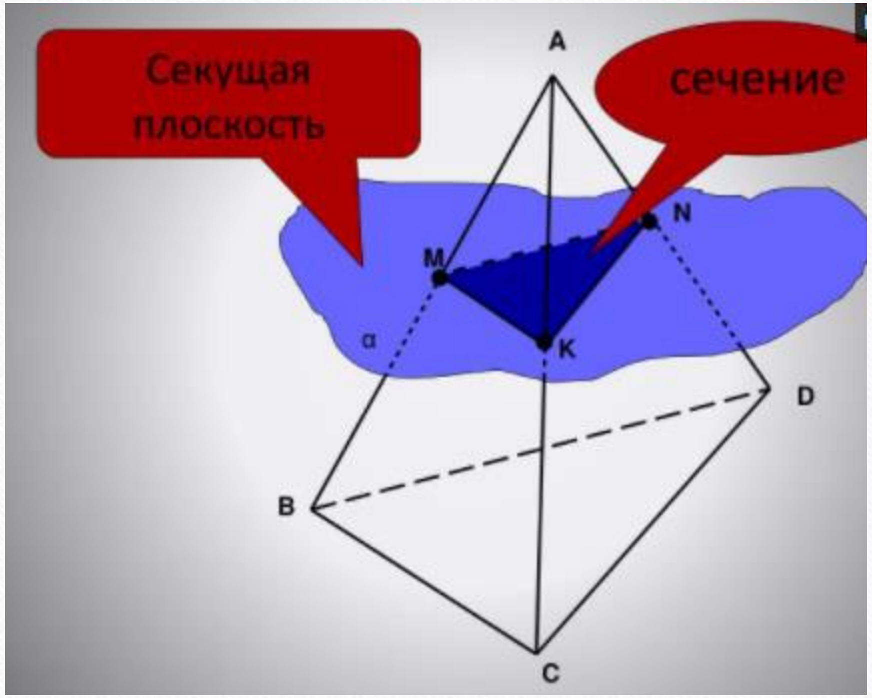
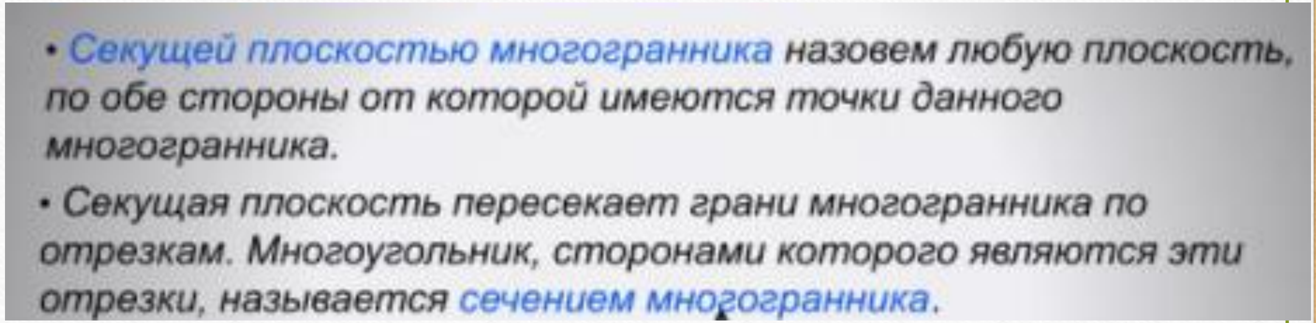
Построение сечений

13,15 января





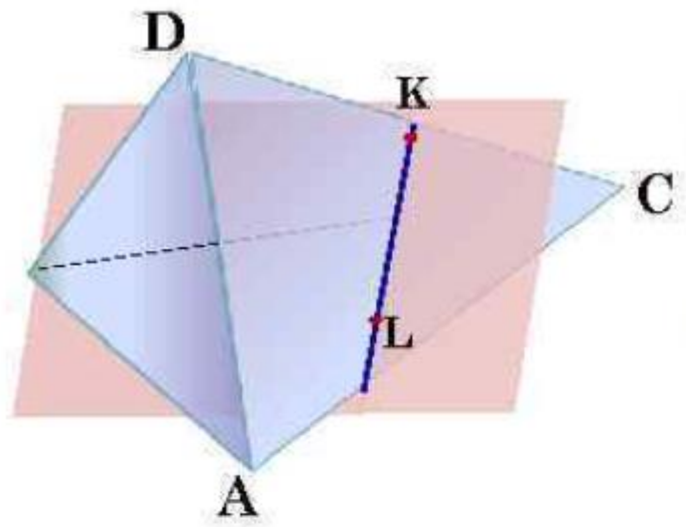
• Секущей плоскостью многогранника назовем любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного многогранника.

• Секущая плоскость пересекает грани многогранника по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением многогранника.

Правило 1.

Если две точки принадлежат как секущей плоскости, так и плоскости некоторой грани многогранника, то прямая, проходящая через эти две точки,

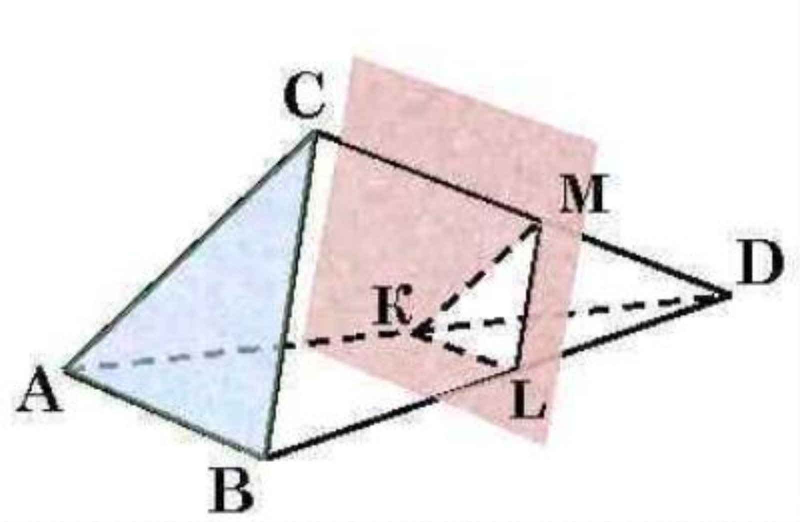
является линией пересечения секущей плоскости с плоскостью этой грани.



Секущая плоскость пересекает грань ADC по прямой KL.

Правило 2.

Если секущая плоскость параллельна некоторой плоскости (грани), то эти две плоскости пересекаются с любой гранью многогранника по параллельным прямым.



Секущая плоскость параллельна плоскости ABC, поэтому:

BC | | ML

AB | | KL

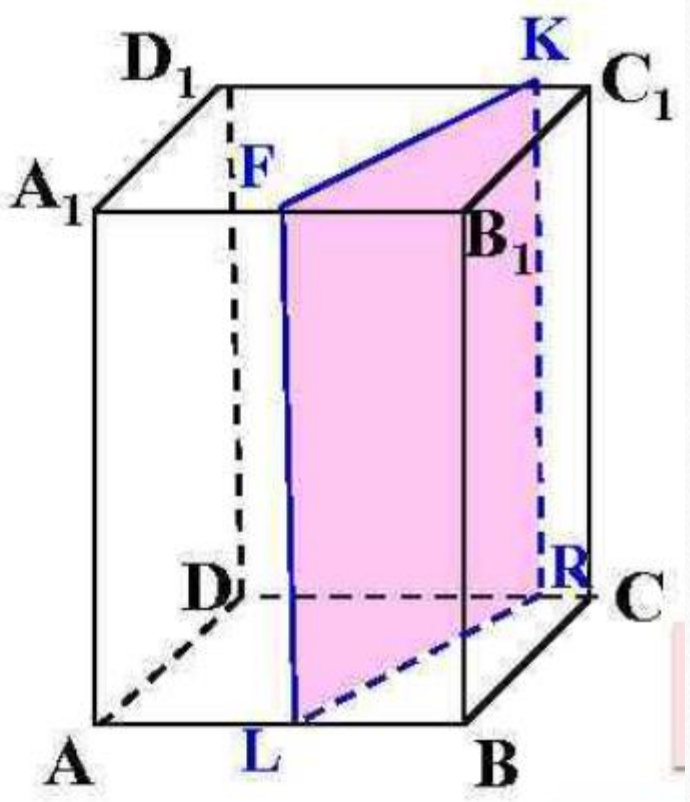
AC | | KM

Правило 3.

Секущая плоскость пересекает параллельные грани по параллельным прямым.

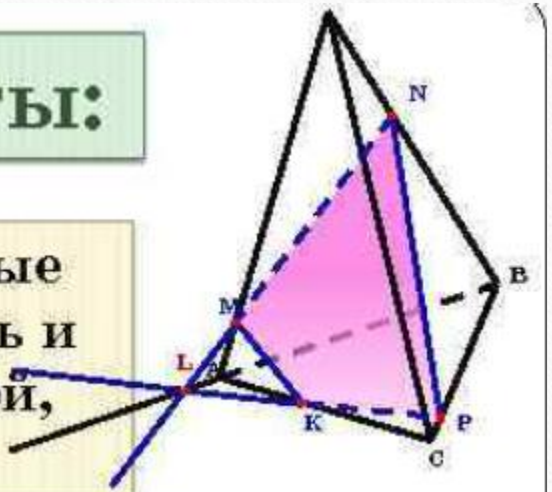
Т. к. $(ABC)||(A_1B_1C_1)$, то $FK||LR$.

Т. к. $(AA_1D_1)||(BB_1C_1)$, то $FL||KR$.



Практические советы:

•если грань содержит две известные точки секущей плоскости, то грань и плоскость пересекаются по прямой, проходящей через эти точки;



•если построена прямая *m* – линия пересечения секущей плоскости с некоторой гранью, то целесообразно отметить точки пересечения прямой *m* со всеми рёбрами этой грани (или их продолжениями);

•если секущая плоскость пересекает параллельные грани многогранника, то линии пересечения параллельны.

Правила построения сечений многогранников:

1) проводим прямые через точки, лежащие в одной плоскости;

2) ищем прямые пересечения плоскости сечения с гранями многогранника, для этого

а) ищем точки пересечения прямой принадлежащей плоскости сечения с прямой, принадлежащей одной из граней (лежащие в одной плоскости);

б) параллельные грани плоскость сечения пересекает по параллельным прямым.

Задача № 3. Построить сечение тетраэдра DABC плоскостью, проходящей через точки M, N, P.

1) PN;

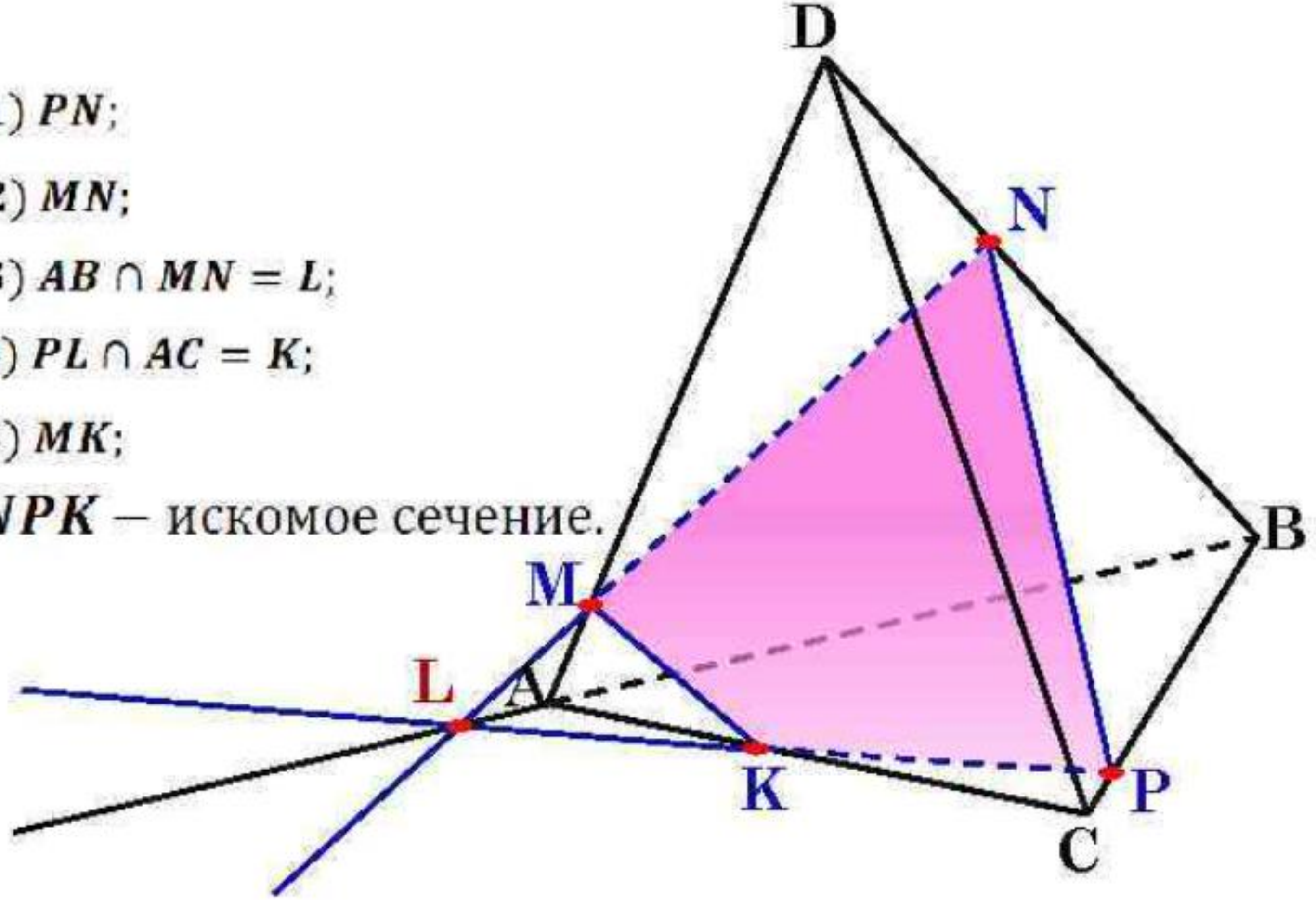
2) MN;

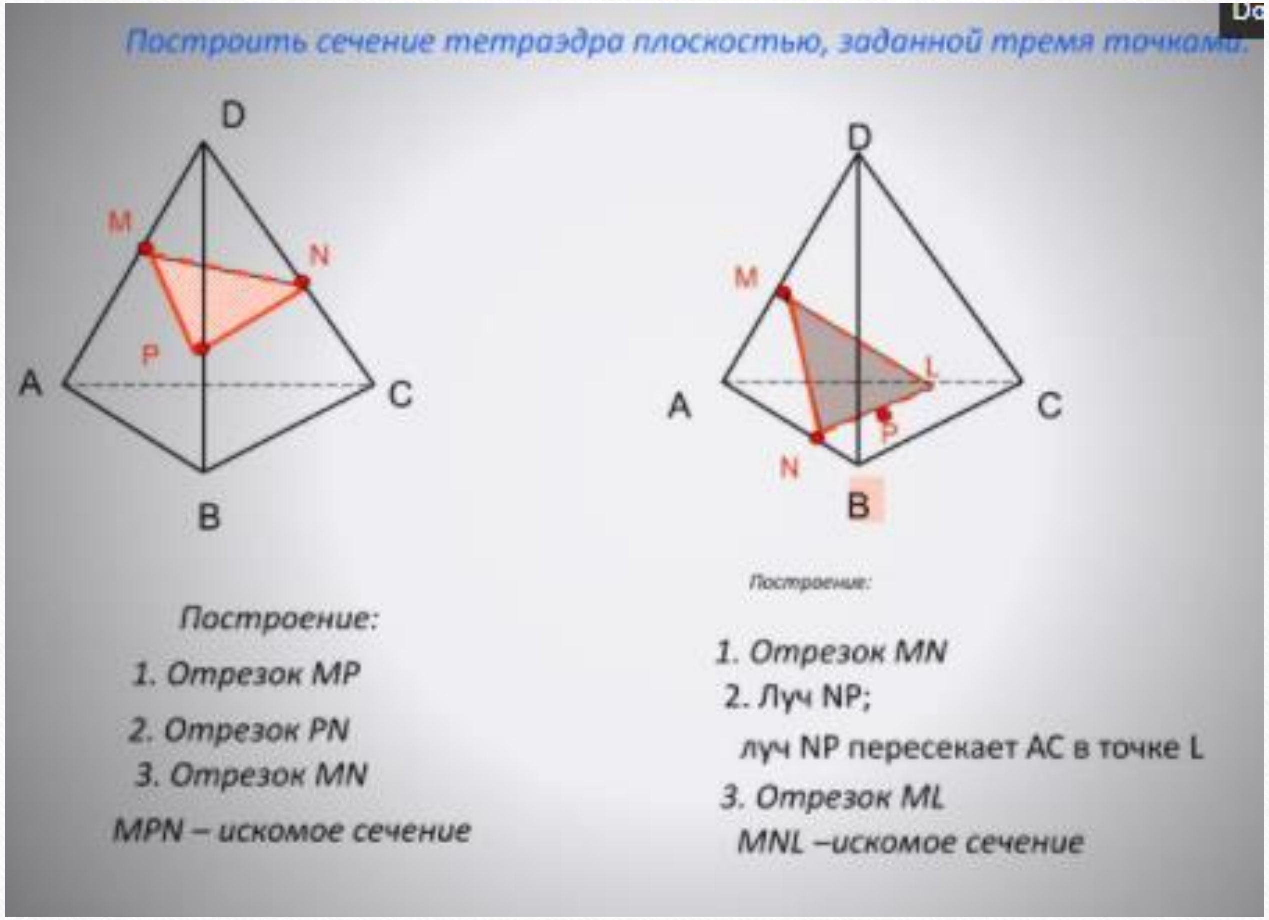
3) $AB \cap MN = L$;

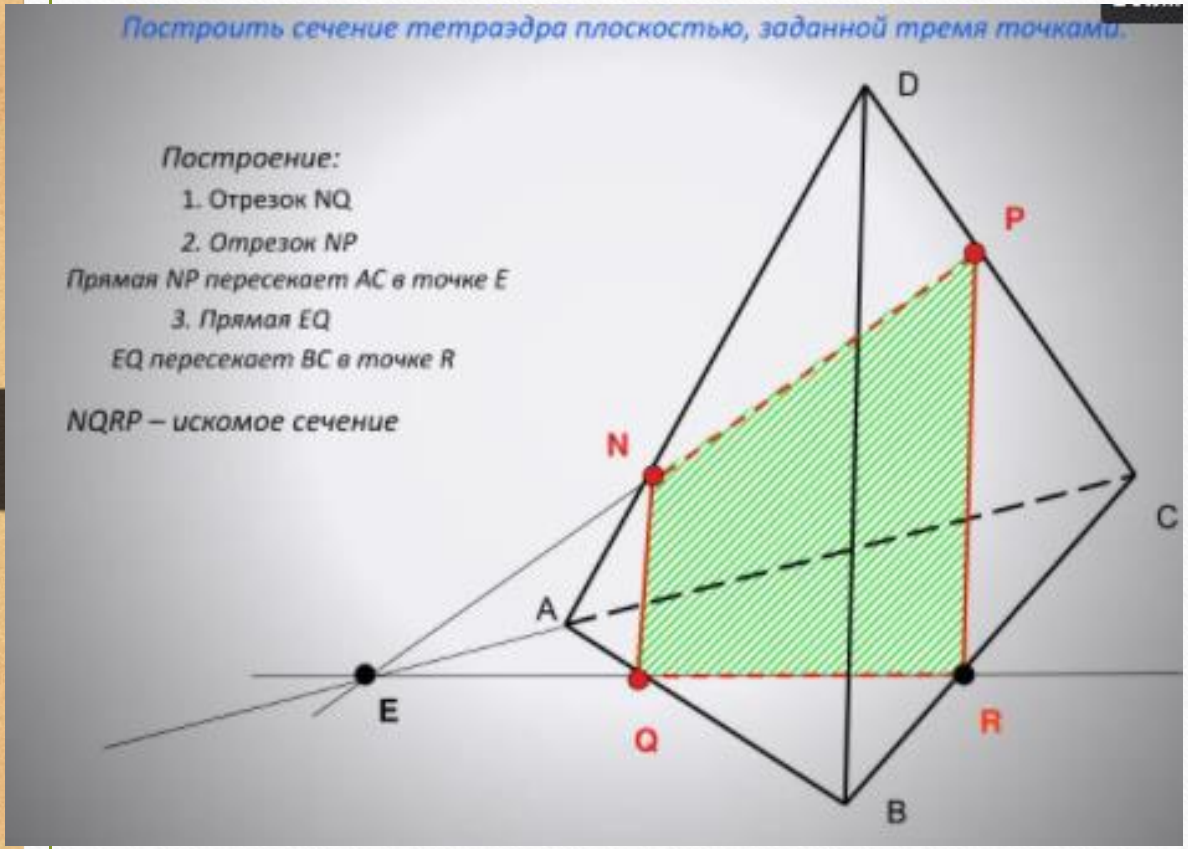
4) $PL \cap AC = K$;

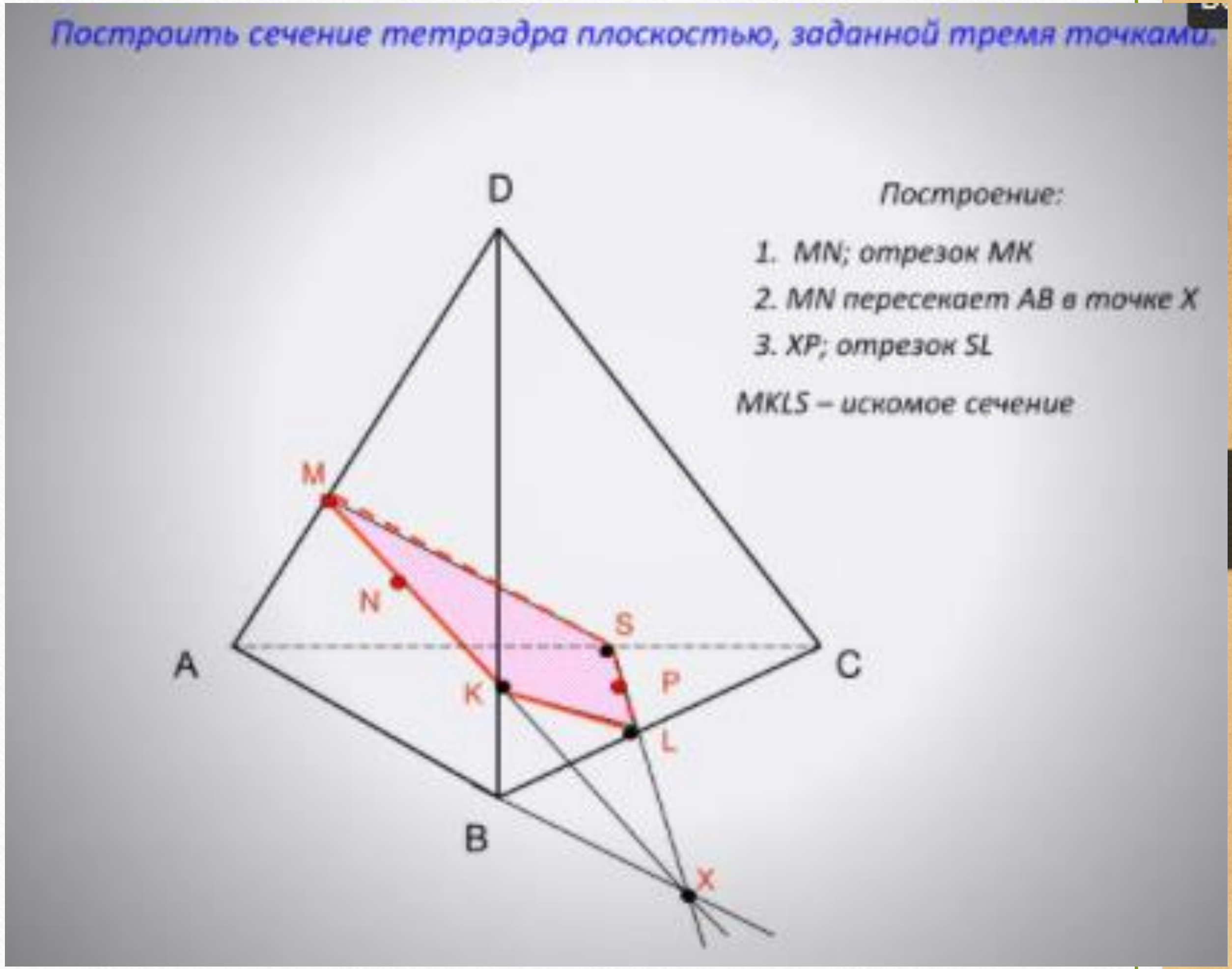
5) MK;

$MNPK$ – искомое сечение.



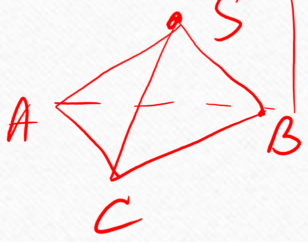

Построить сечение тетраэдра плоскостью, заданной тремя точками.
D
M
N
P
A
C
B
Построение:
1. Отрезок MP
2. Отрезок PN
3. Отрезок MN
MPN – искомое сечение
D
M
L
A
C
P
N
B
Построение:
1. Отрезок MN
2. Луч NP;
луч NP пересекает AC в точке L
3. Отрезок ML
MNL –искомое сечение


Построить сечение тетраэдра плоскостью, заданной тремя точками.
Построение:
1. Отрезок NQ
2. Отрезок NP
Прямая NP пересекает AC в точке E
3. Прямая EQ
EQ пересекает BC в точке R
NQRP – искомое сечение
D
P
N
C
A
E
Q
R
B


Построить сечение тетраэдра плоскостью, заданной тремя точками.
Построение:
1. MN; отрезок MK
2. MN пересекает AB в точке X
3. XP; отрезок SL
MKLS – искомое сечение
D
M
N
S
A
K
P
C
L
B
X

Сечения

Тетраэдра



Вершины 4

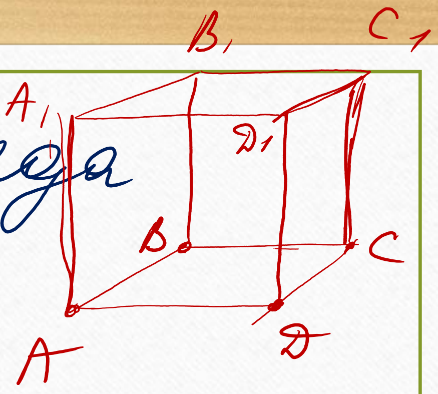
Ребра 6

Грани 4

В сечениях могут быть

1) △
2) Четырехугольники

Параллелепипеда



Вершины 8

Ребра 12

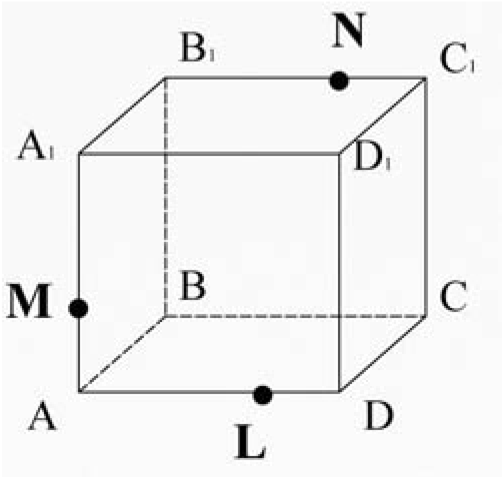
Грани 6

В сечениях могут получиться

1) △
2) Четыр-ки
3) 5 угольники
4) 6 угольники

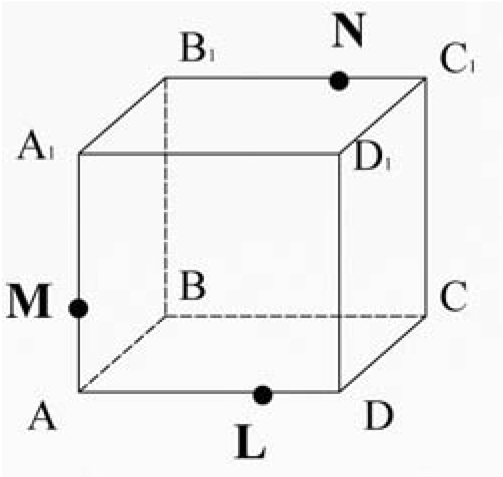
Пример 1.

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построим сечение, проходящее через точки M, N, L.

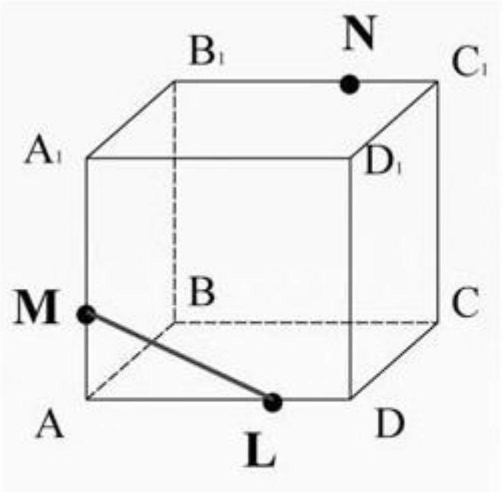


Пример 1.

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построим сечение, проходящее через точки M, N, L.

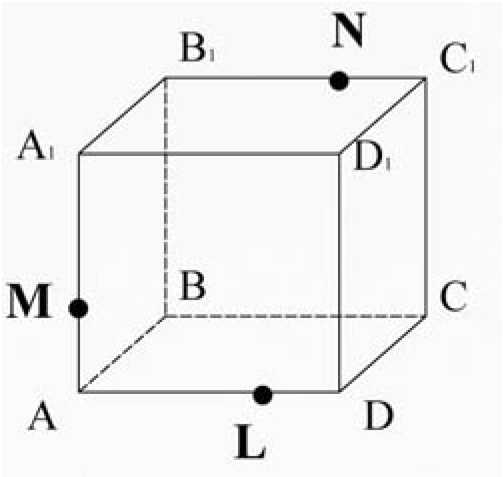


1 Соединим точки M и L, лежащие в плоскости AA_1D_1D.

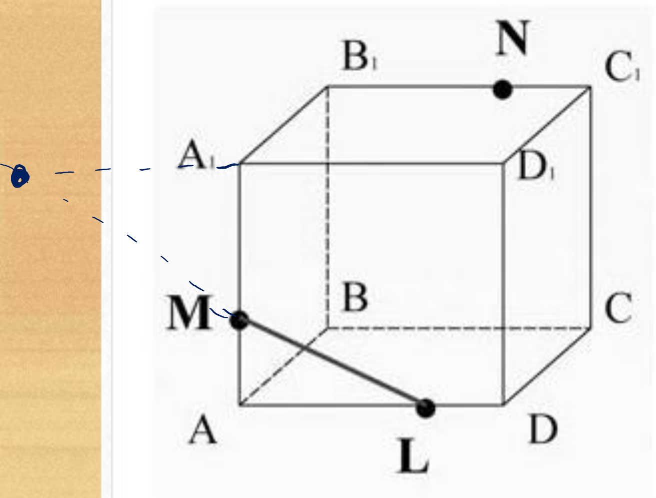


Пример 1.

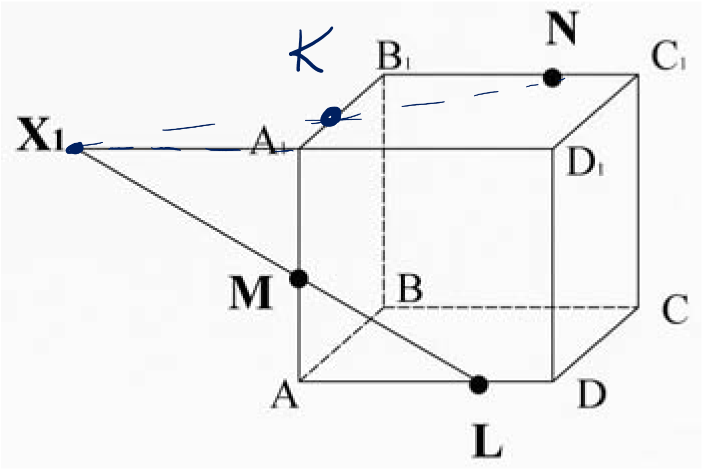
Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построим сечение, проходящее через точки M, N, L.



Соединим точки M и L, лежащие в плоскости AA_1D_1D.



2) Пересечем прямую ML (принадлежащую сечению) с ребром A_1D_1, они лежат в одной плоскости AA_1D_1D. Получим точку X_1.



2) $ML \cap A_1D_1 = X_1$

3) X_1N

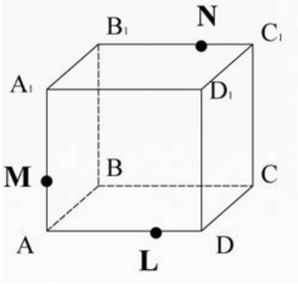
4) $X_1N \cap A_1B_1 = K$

Точка X_1 лежит на ребре A_1D_1, а значит и плоскости $A_1B_1C_1D_1$, соединим ее сточкой N, лежащей в этой же плоскости.

X_1 N пересекается с ребром A_1B_1 в точке K.

ример 1.

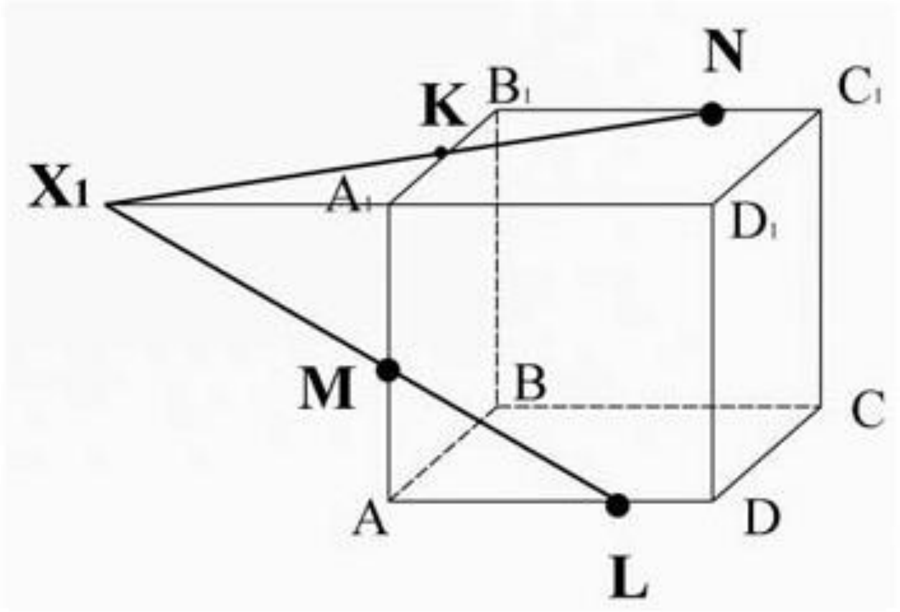
ассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построим сечение, проходящее через очки M, N, L.



Точка X_1 лежит на ребре A_1D_1, а значит и плоскости $A_1B_1C_1D_1$, соединим ее сточкой N, лежащей в этой же плоскости.

X_1 N пересекается с ребром A_1B_1 в точке K.

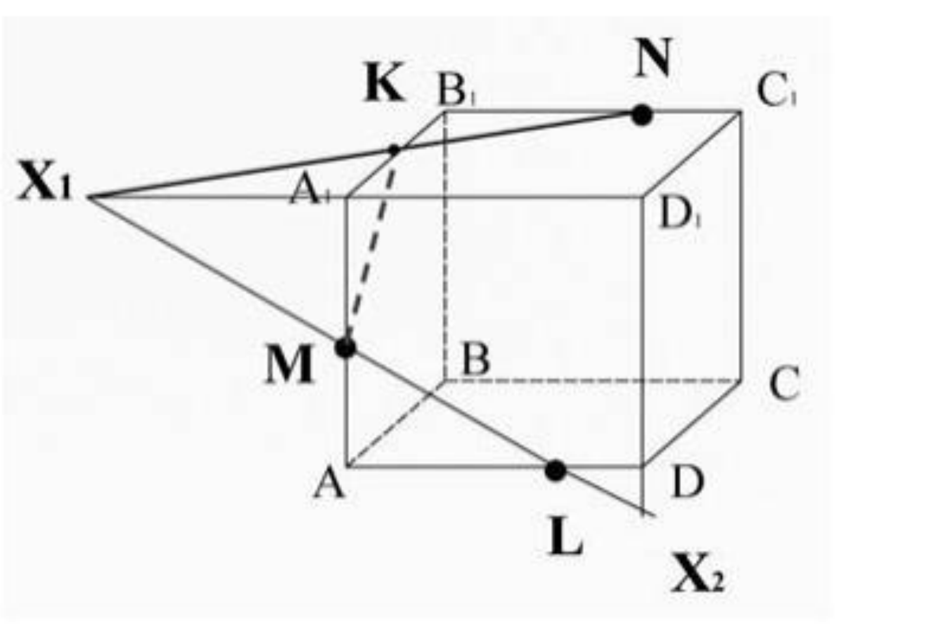
5) KM



оединим точки K и M, лежащие в одной плоскости AA_1B_1B.

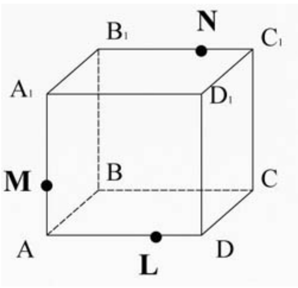
Найдем прямую пересечения плоскости сечения с плоскостью DD_1C_1C:

пересечем прямую ML (принадлежащую сечению) с ребром DD_1, они лежат в одной плоскости AA_1D_1D, получим точку X_2;



ример 1.

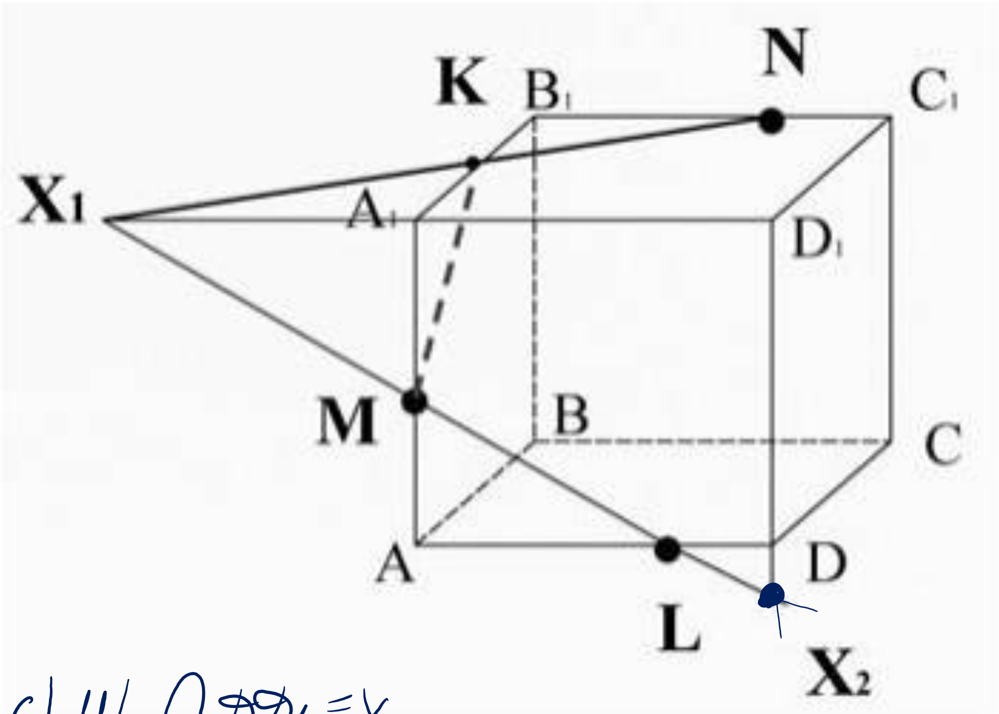
ассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построим сечение, проходящее через очки M, N, L.

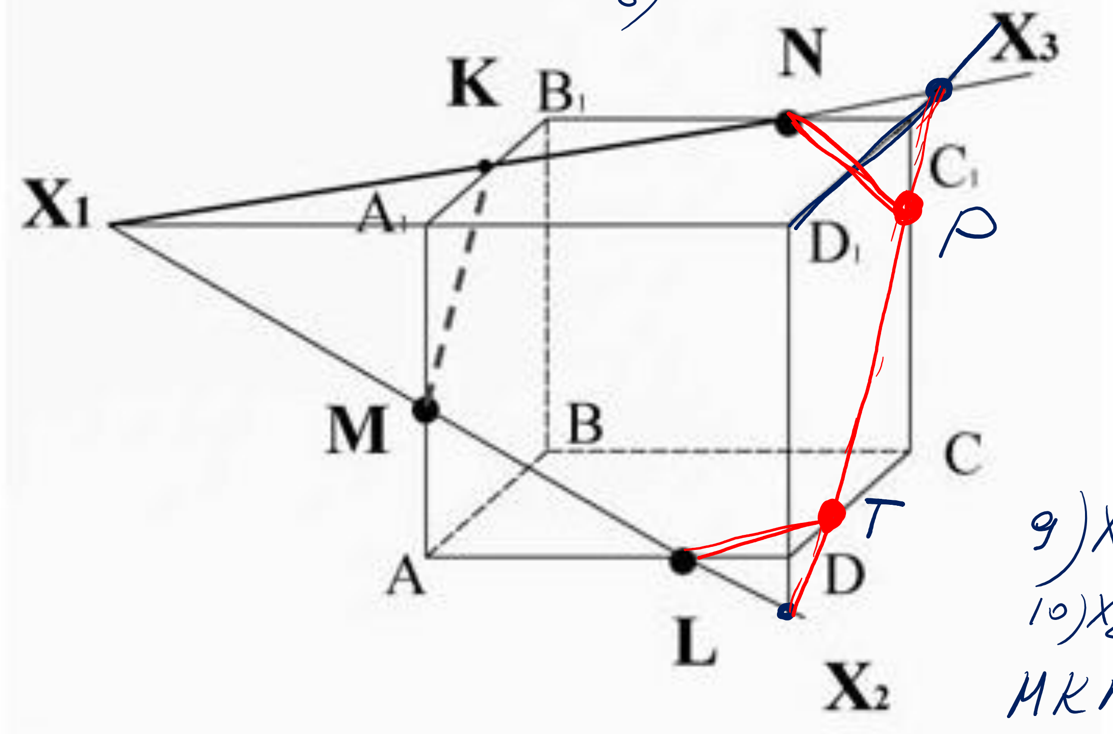


пересечем прямую KN (принадлежащую сечению) с ребром D_1C_1, они лежат в одной плоскости $A_1B_1C_1D_1$, получим точку X_3;

7) $KN \cap C_1D_1 = X_3$

8) X_2X_3





6) $ML \cap DD_1 = X_2$

9) $X_2X_3 \cap CC_1 = P$

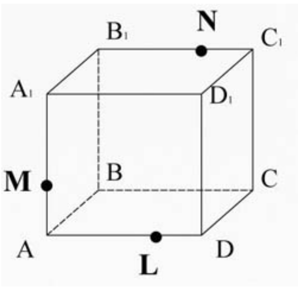
10) $X_2X_3 \cap CD = T$

MKNPTL – сечение

Точки X_2 и X_3 лежат в плоскости DD_1C_1C. Проведем прямую X_2 X_3 , которая пересечет ребро C_1C в точке T, а ребро DC в точке P. И соединим точки L и P, лежащие в плоскости ABCD.

ример 1.

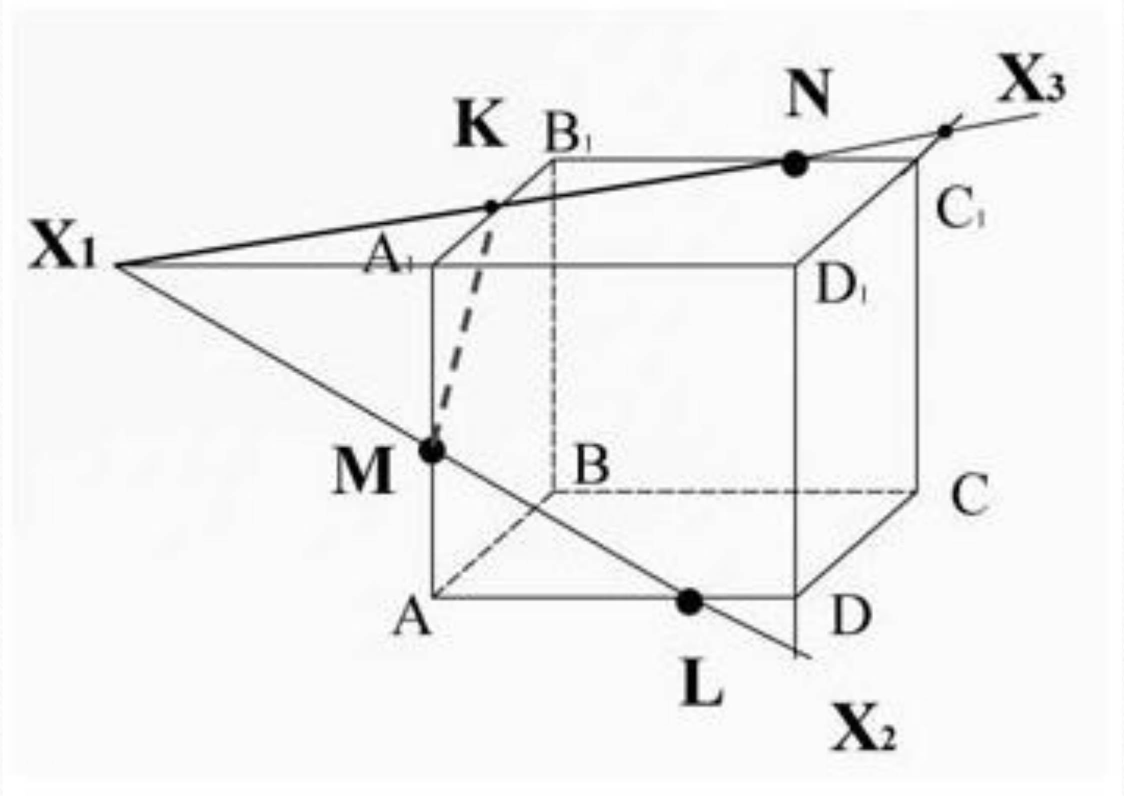
ассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построим сечение, проходящее через очки M, N, L.

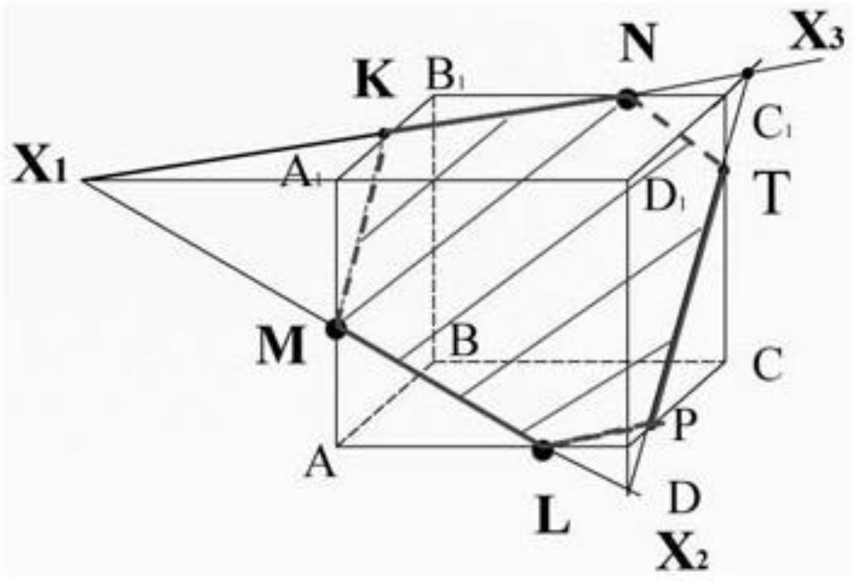


Точки X_2 и X_3 лежат в плоскости DD_1C_1C. Проведем прямую X_2 X_3 , которая пересечет ребро C_1C в точке T, а ребро DC в точке P. И соединим точки L и P, лежащие в плоскости ABCD.

?

$KN \parallel LP$ $ML \parallel NT$ $MK \parallel TP$

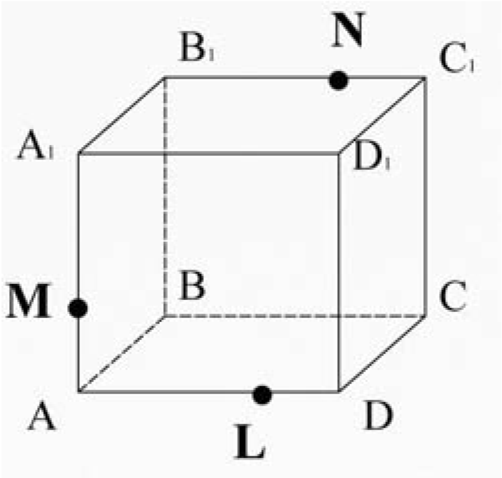




MKNTPL - искомое сечение.

Пример 2. (II способ) + 3 правило.

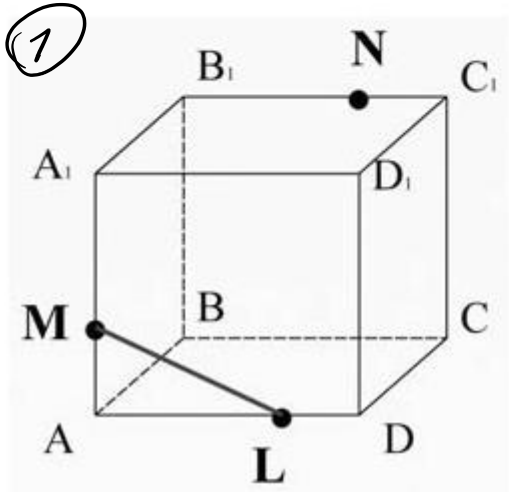
Рассмотрим ту же самую задачу на построение сечения, но воспользуемся свойством параллельных плоскостей. Это облегчит нам построение сечения.



1) ML
2) NT || ML

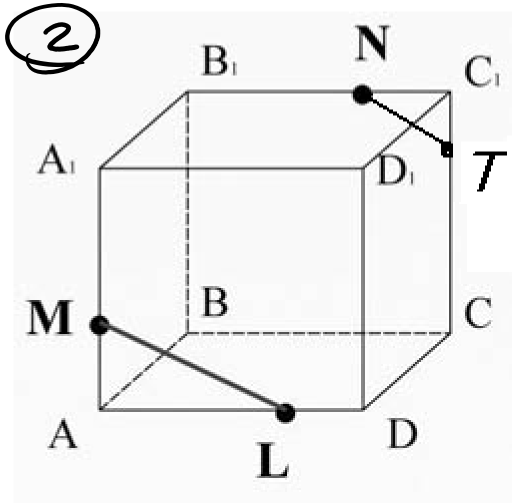
Соединим точки M и L, лежащие в плоскости AA_1D_1D.

1

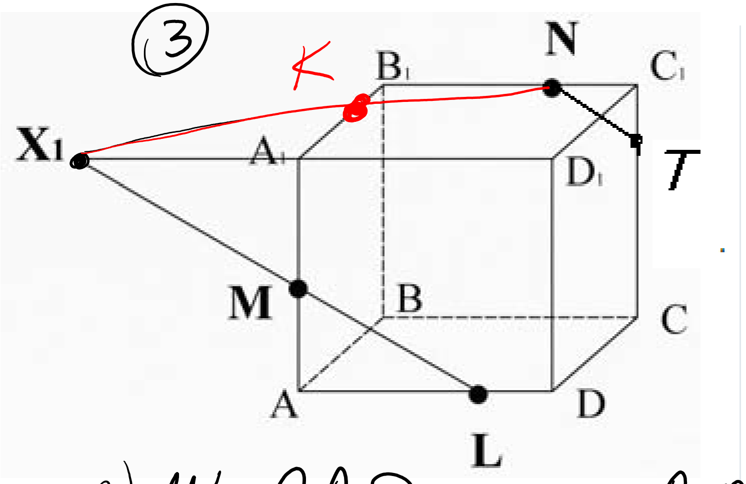


Через точку N, проведем прямую NT параллельную прямой ML. Прямые NT и ML лежат в параллельных плоскостях по свойству параллелепипеда.

2



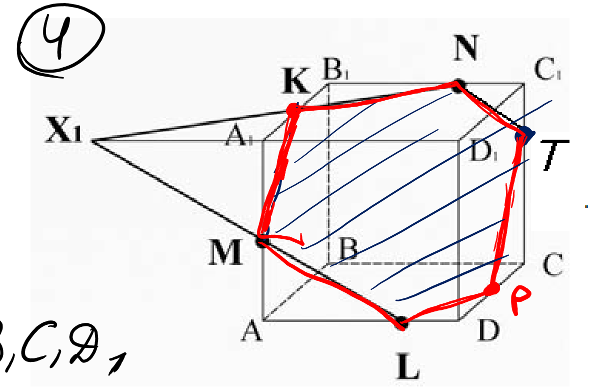
Пересечем прямую ML (принадлежащую сечению) с ребром A_1D_1, они лежат в одной плоскости AA_1D_1D. Получим точку X_1.



3) $ML \cap A_1D_1 = X_1 \in A_1B_1C_1D_1$

Точка X_1 лежит на ребре A_1D_1, а значит и плоскости $A_1B_1C_1D_1$, соединим ее сточкой N, лежащей в этой же плоскости.

X_1 N пересекается с ребром A_1B_1 в точке K.



4) $X_1N \cap A_1B_1 = K$

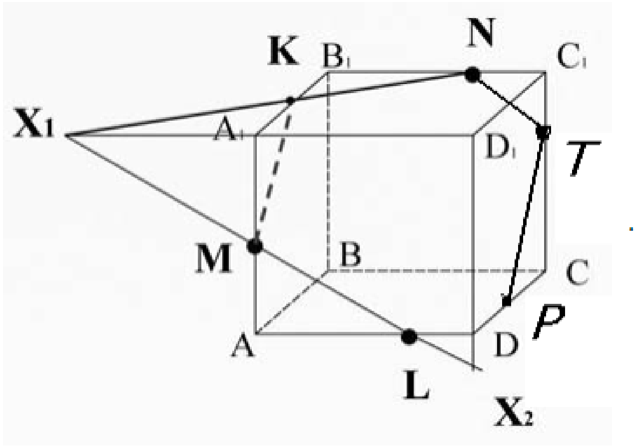
5) MK

6) $TP \parallel KM$, $TP \cap CD = P$

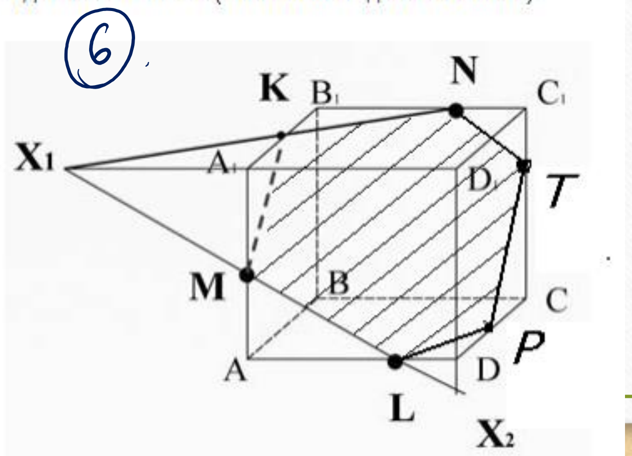
7) LP

Соединим точки K и M, лежащие в одной плоскости AA_1B_1B.

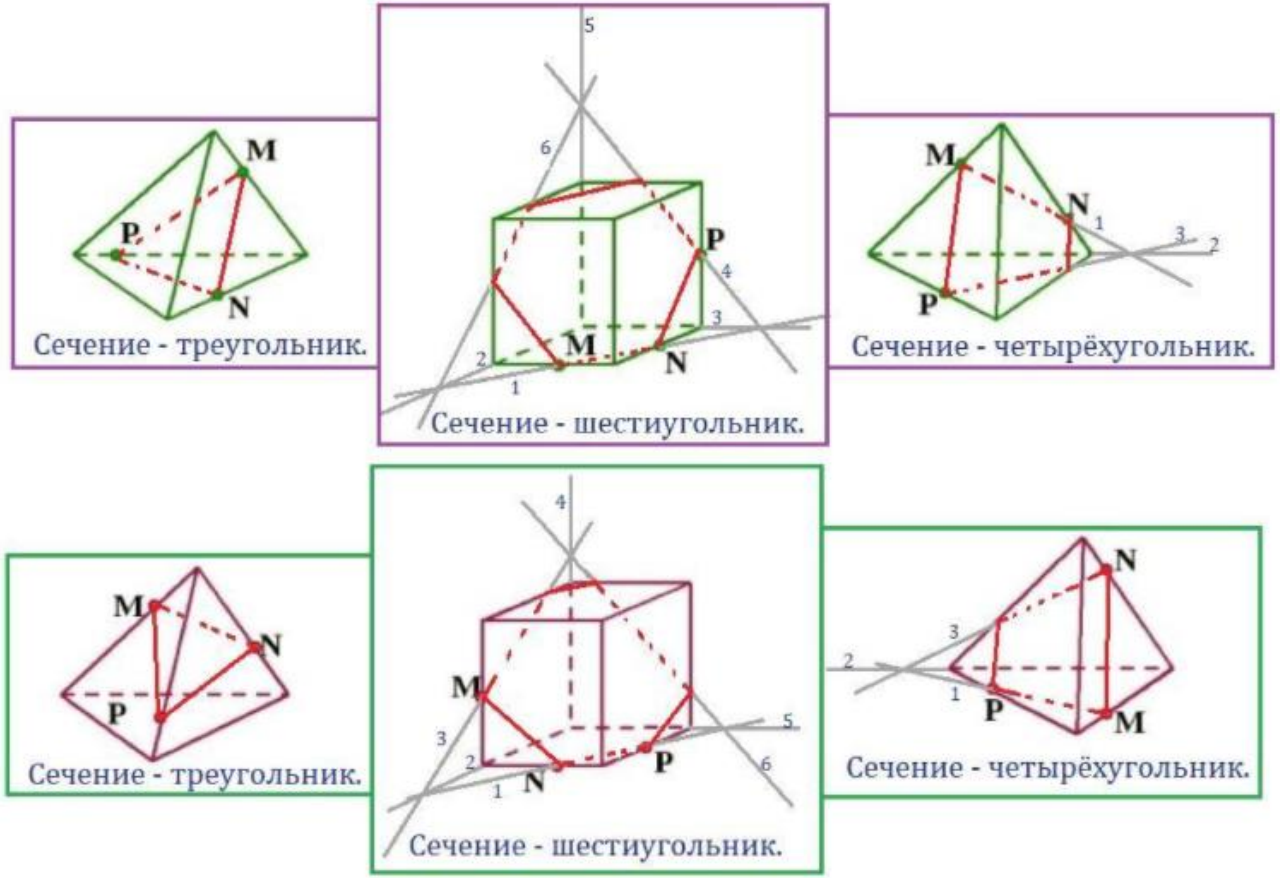
Проведем прямую TP через точку T, параллельно прямой KM (они лежат в параллельных плоскостях).



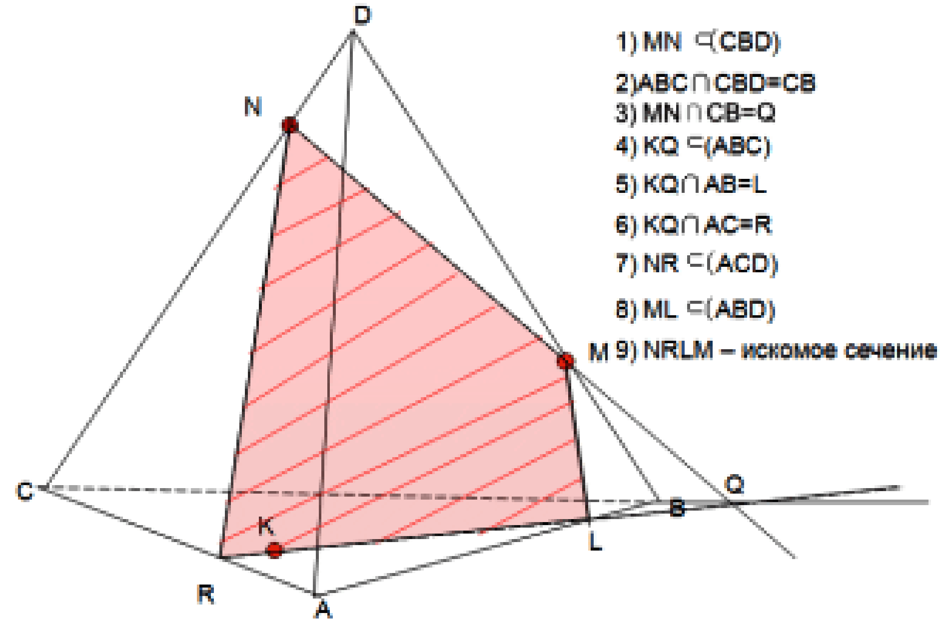
Соединим точки P и L (они лежат в одной плоскости).



Итак, **сечением многогранника** называют многоугольник, вершины которого лежат на ребрах многогранника, а стороны – на его гранях.



– Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки N, M, K.



1) $MN \subset (CBD)$

2) $ABC \cap CBD = CB$

3) $MN \cap CB = Q$

4) $KQ \subset (ABC)$

5) $KQ \cap AB = L$

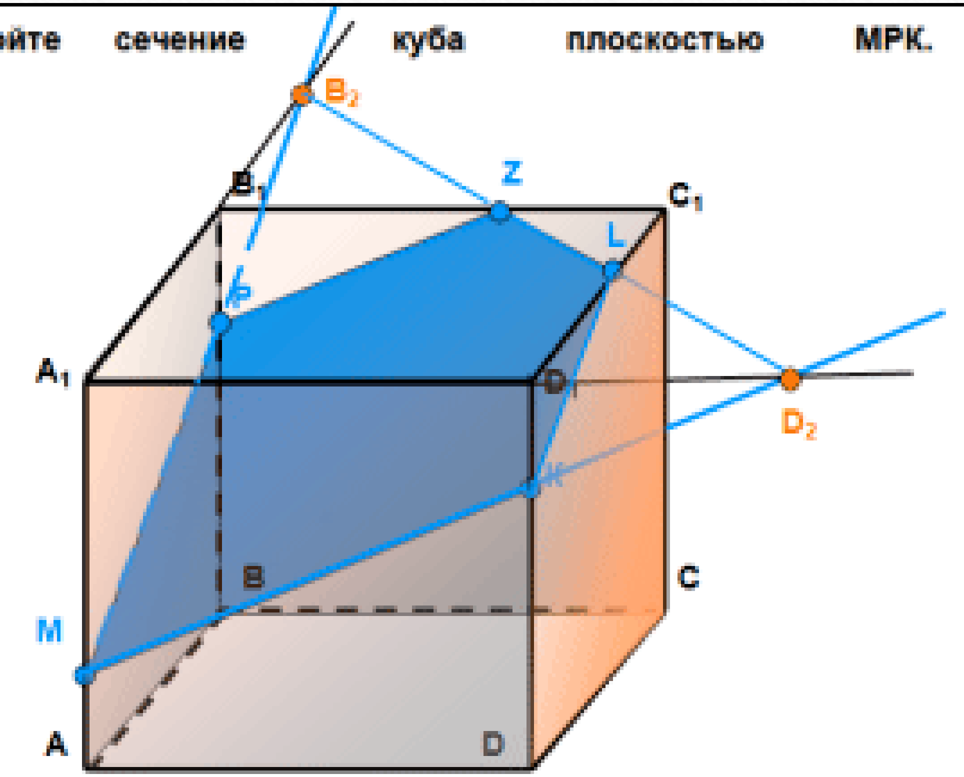
6) $KQ \cap AC = R$

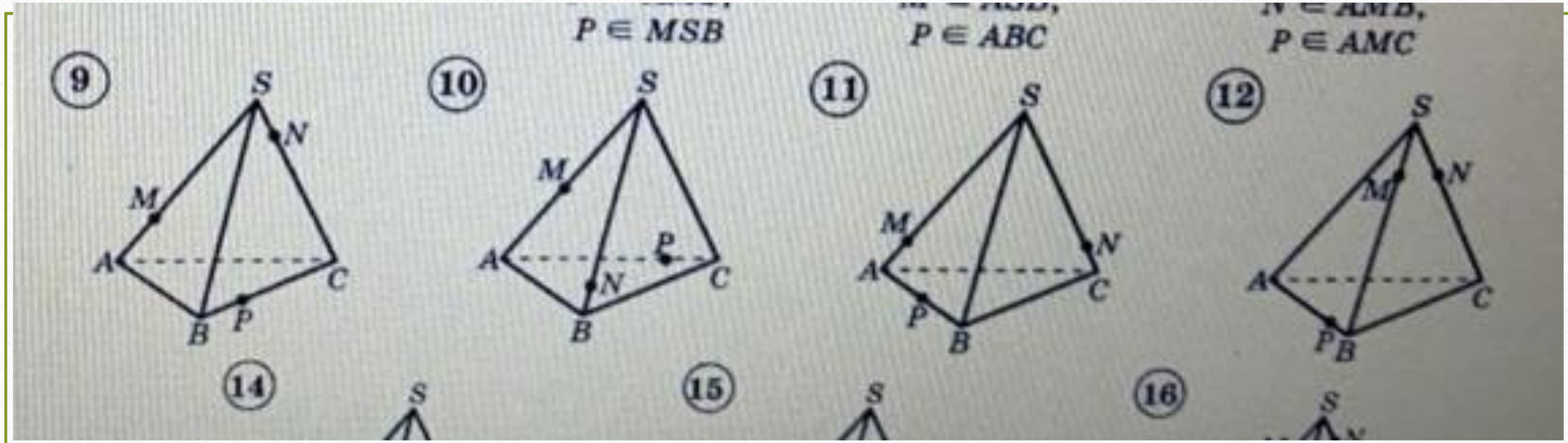
7) $NR \subset (ACD)$

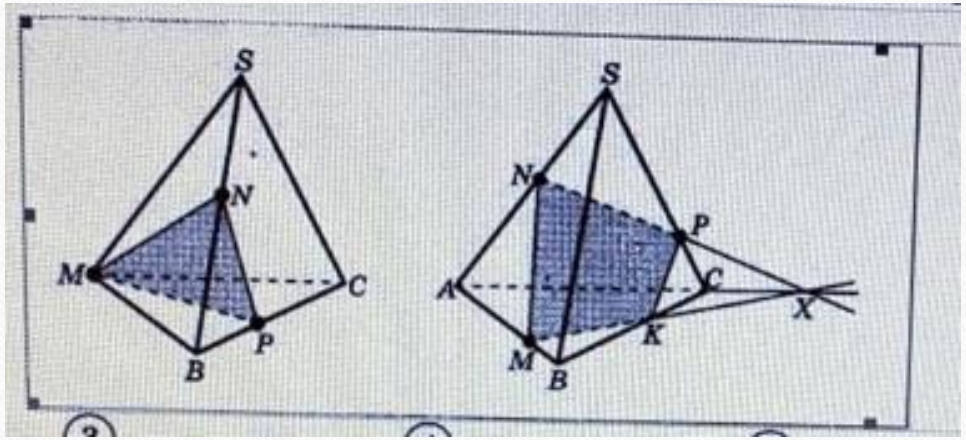
8) $ML \subset (ABD)$

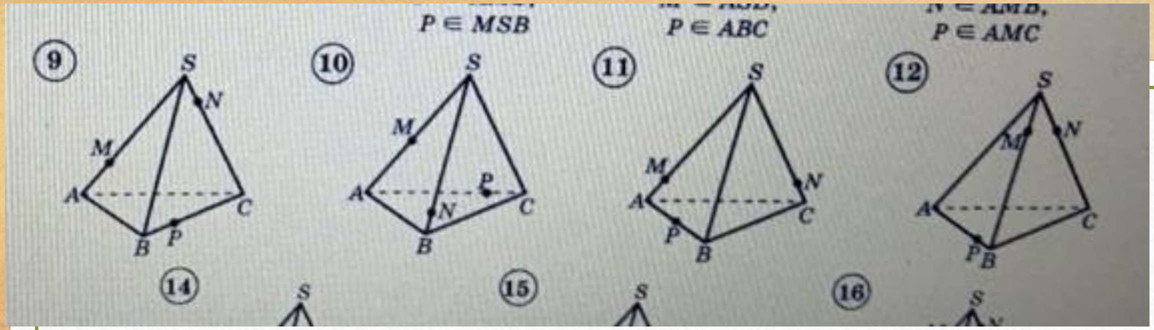
9) NRLM – искомое сечение

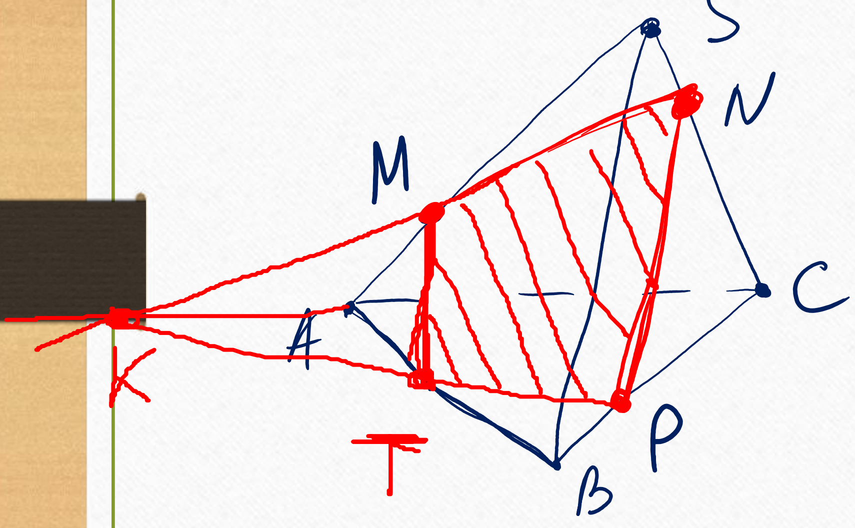
Постройте сечение куба плоскостью МРК.




P ∈ MSB
P ∈ ABC
P ∈ AMC
9
10
11
12
14
15
16







Дано:

$M \in AS$

$N \in SC$

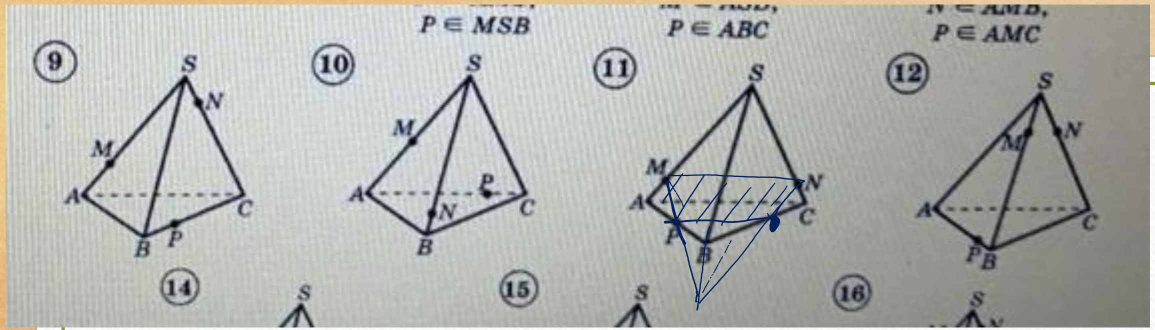
$P \in BC$

Сечение через MPS

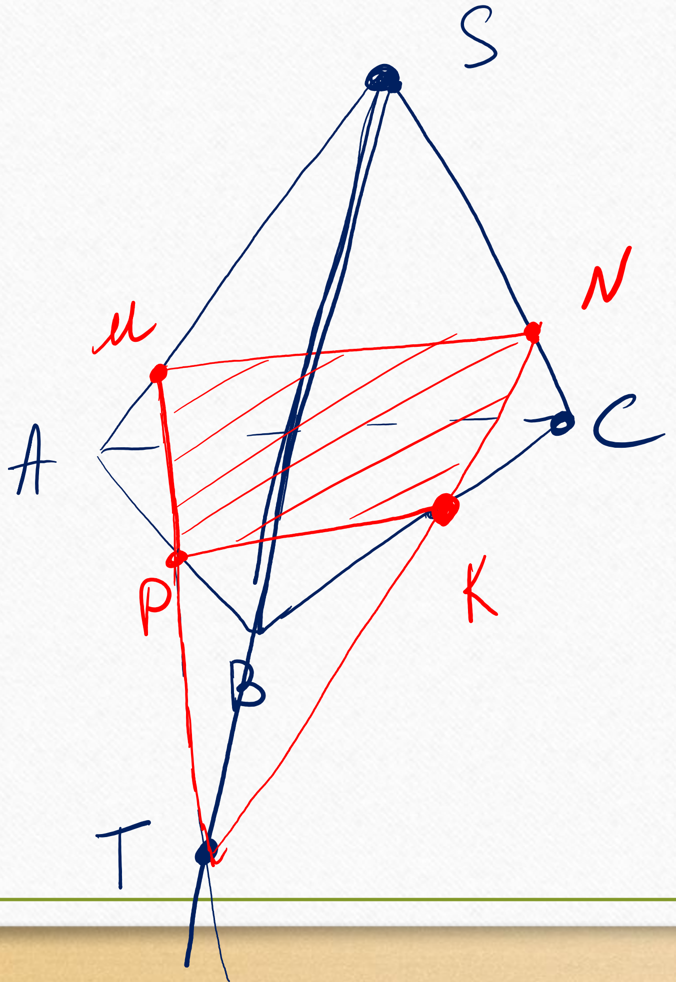
Решение:

1. Соединим M с S, т.к. M, S ∈ одной грани ASC.
2. Соединим N с P, т.к. N, P ∈ одной грани BSC.
3. Находим точку пересечения MN и AC, получаем точку K.
4. Соединим точки K и P, т.к. они лежат в одной плоскости.
5. $T = AB \cap KP$, соединим M и T.

MNPT – искомое сечение

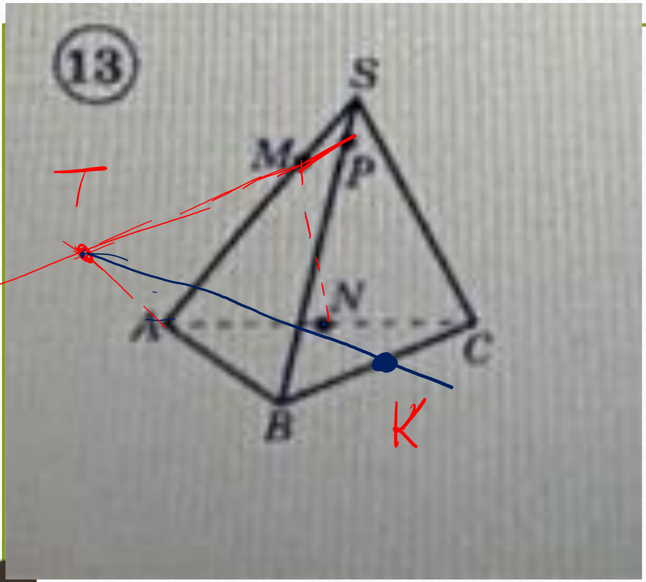


11



Решение:

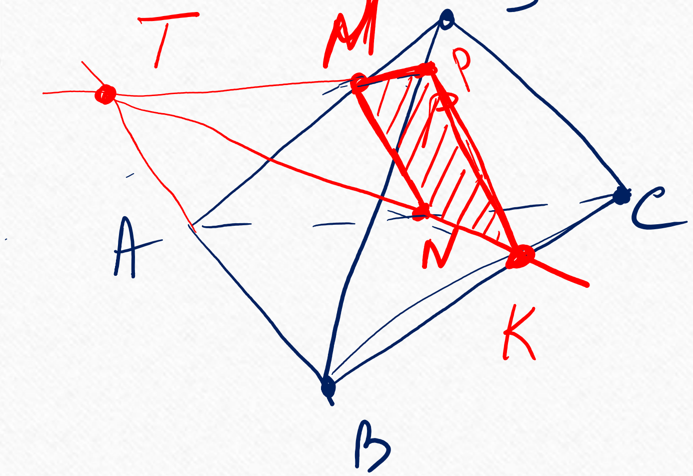
1. ~~Проведе~~
Соединим M с N, т.к. обе точки лежат на одной грани ASC.
2. Соединим M с P, т.к. M и P лежат на грани ASB.
3. $MP \cap SB = T$
4. $TN \cap BC = K$
5. MNKP — искомое сечение

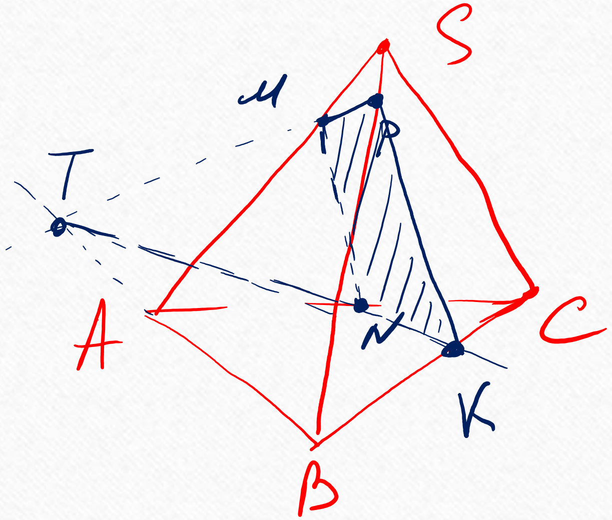


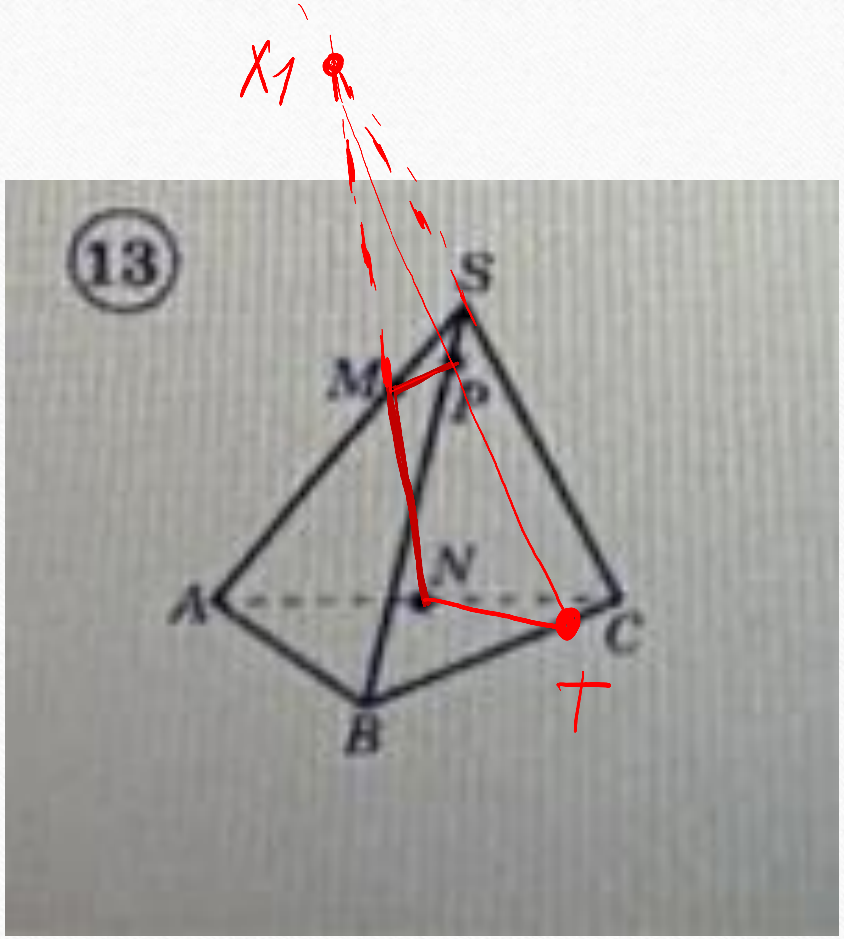
Решение:

1. Проведем MP, т.к. M и P лежат на одной грани ASB
2. Проведем MN, — — — — — ASC
3. Находим точку пересечения MP и AB $= T$
4. Проведем TN, т.к. точки лежат в одной плоскости.
5. $TN \cap BC = K$
6. Соединим P и K, и N и K

MPKN – искомое сечение

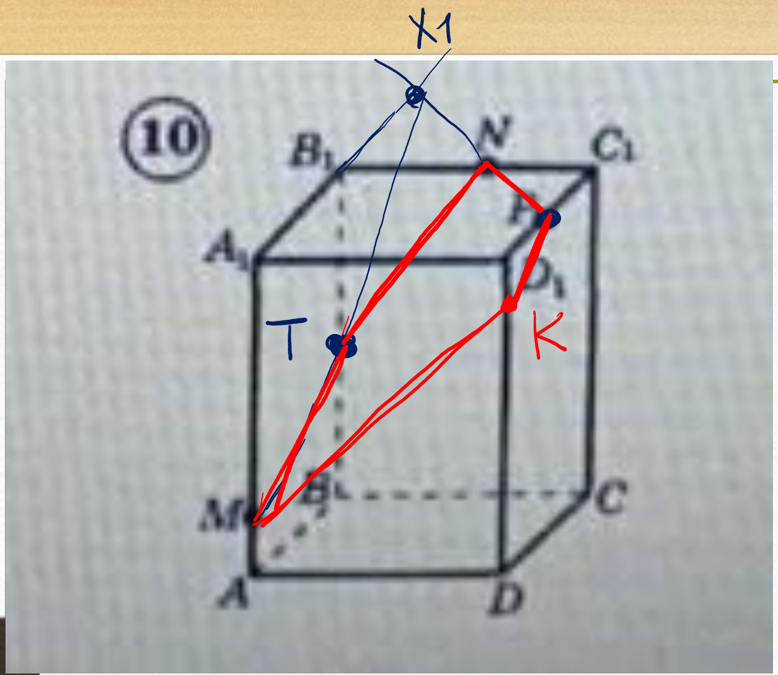


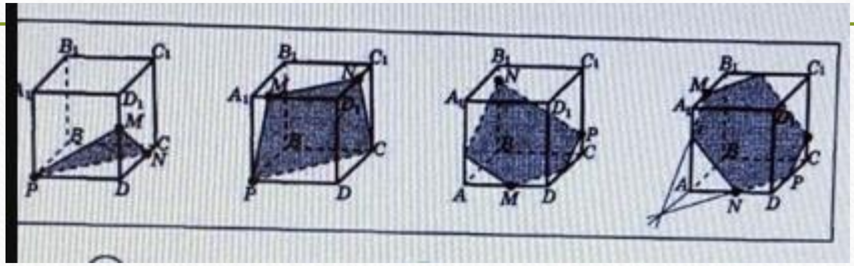




1) MP
2) MN
~~3) MN,SC=1~~
~~1P DC=2~~

3) $MN \cap SC = X_1$
4) X_1P
5) $X_1P \cap BC = T$
6) TN

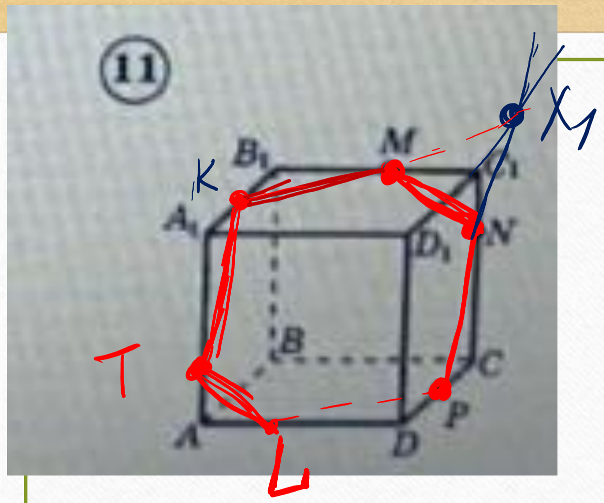




! TN || MK
MT || PK

1) NP
2) $NP \cap A_1B_1 = X_1$
3) MX_1
4) $MX_1 \cap BB_1 = T$
5) NT
6) MT
7) TN
8) через P || MT, $PK \cap DD_1 = K$
9) MK

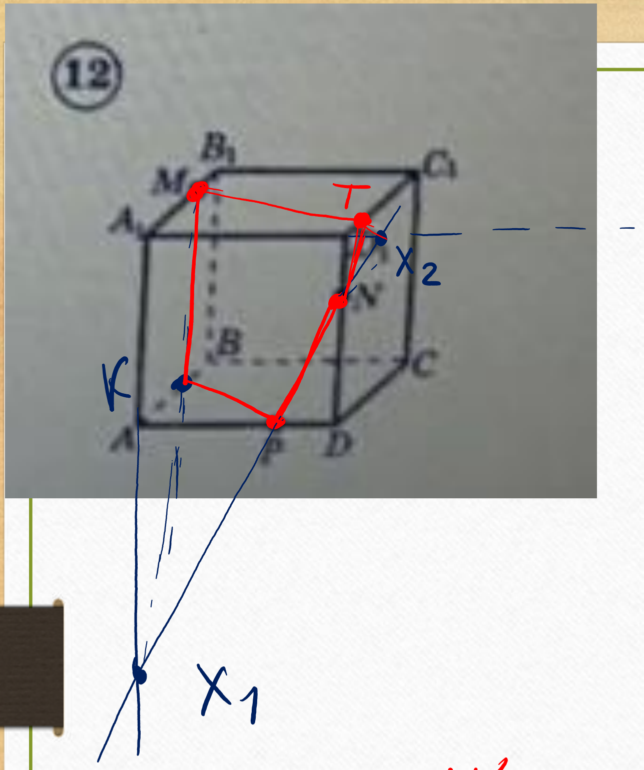
MTNPK – сечение



1) MN
2) NP
3) $NP \cap C_1D_1 = X_1$
4) X_1M
5) $X_1M \cap A_1B_1 = K$
6) KM
7) $NP \parallel KT$
8) $PL \parallel KM$
9) TL

$TKMNPL$ – сечение

$MN \parallel TL$
$NP \parallel KT$
$LP \parallel KM$



$TN \parallel MK$

$MT \parallel KP$

1) PN

2) $PN \cap AA_1 = X_1$

3) $X_1M \cap AB = K$

4) MK

5) KP

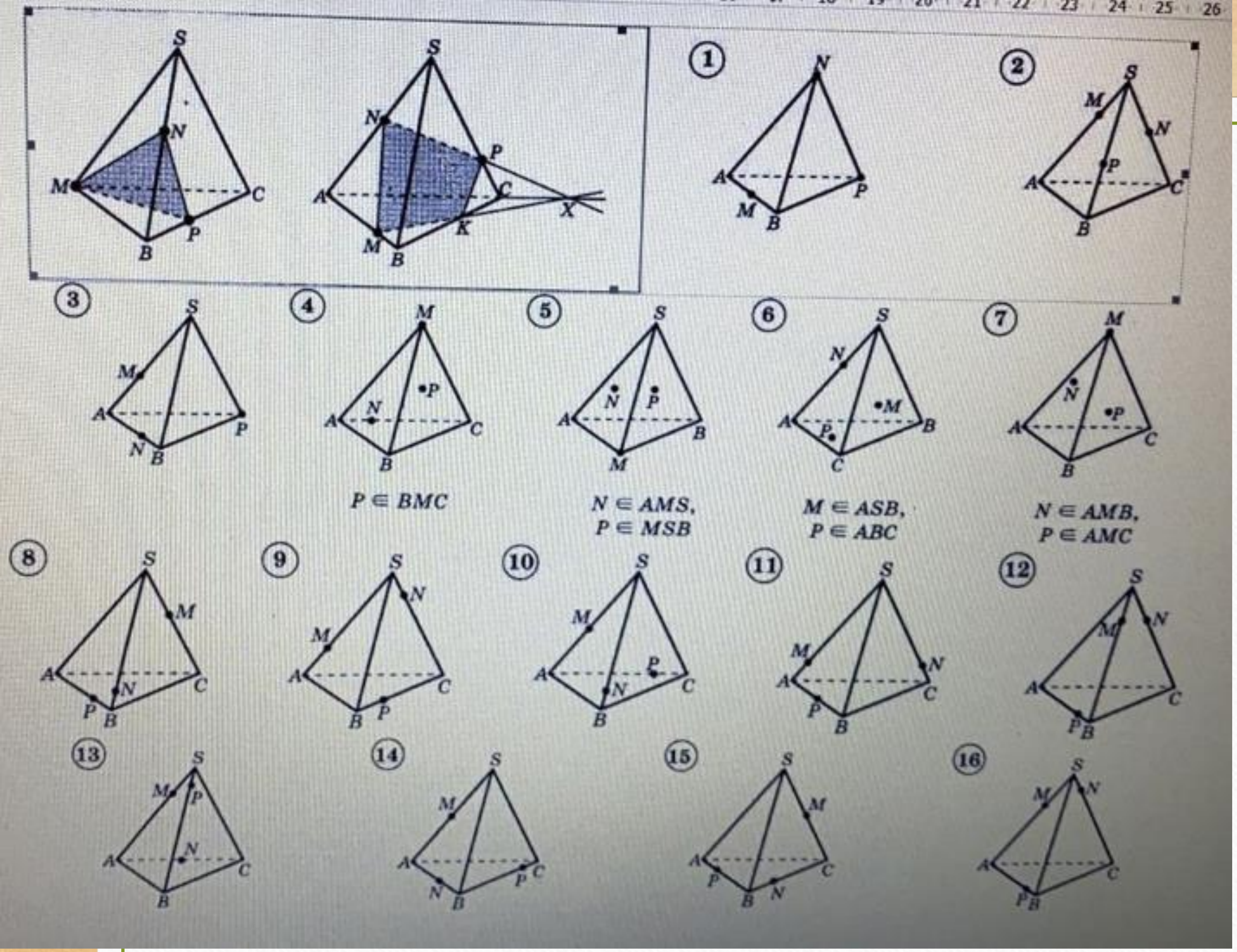
~~6) $MT \parallel KP$~~

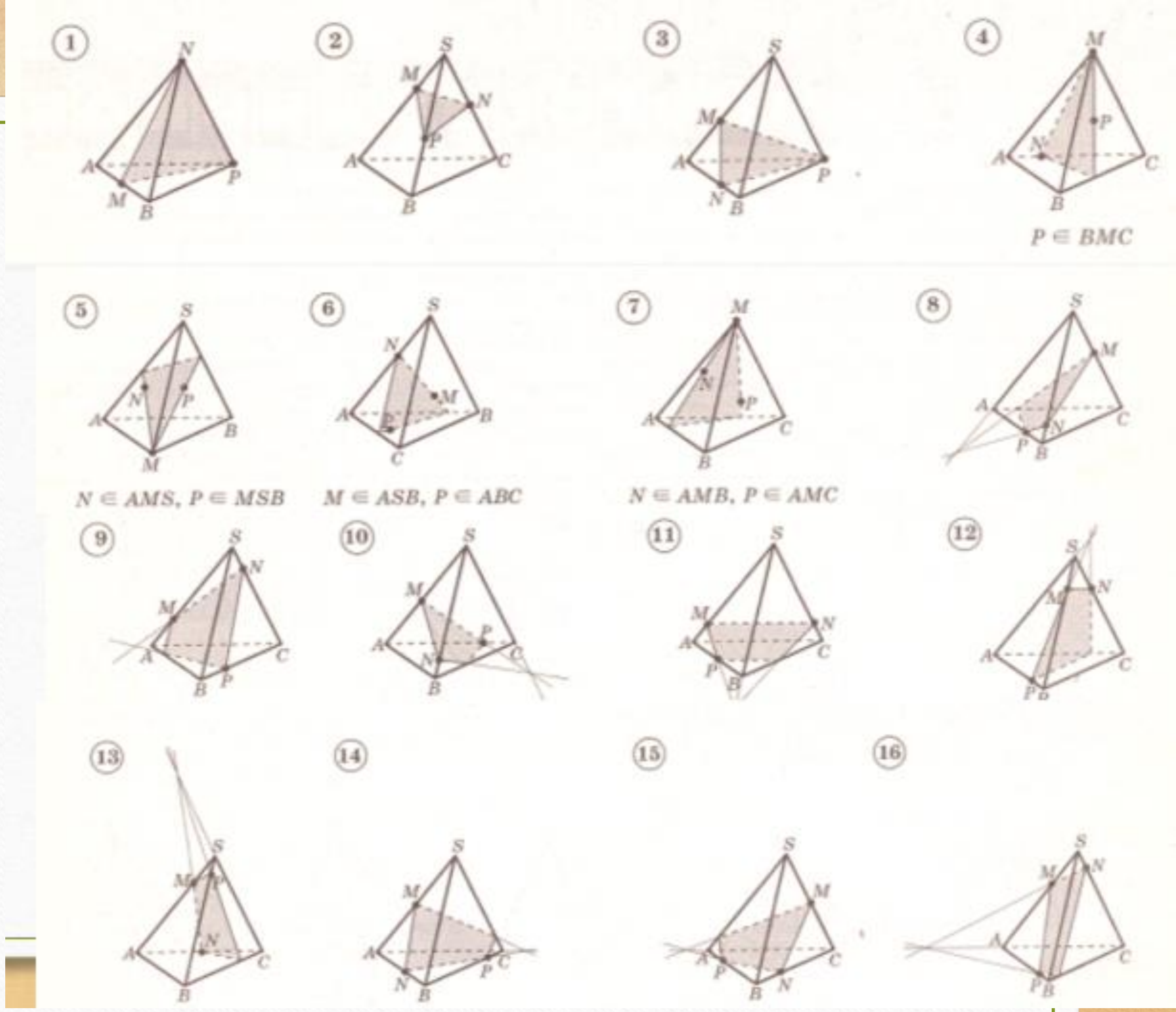
6) $PN \cap A_1D_1 = X_2$

7) $MX_2 \cap C_1D_1 = T$

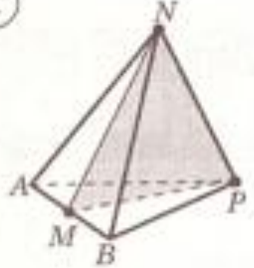
8) NT

$MTNPK$ – сечение

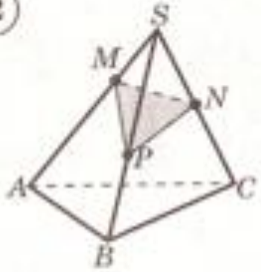

$P \in BMC$
$N \in AMS,$
$P \in MSB$
$M \in ASB,$
$P \in ABC$
$N \in AMB,$
$P \in AMC$


$P \in BMC$
$N \in AMS,\ P \in MSB$
$M \in ASB,\ P \in ABC$
$N \in AMB,\ P \in AMC$

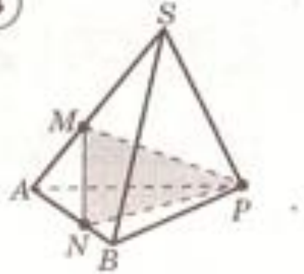
1



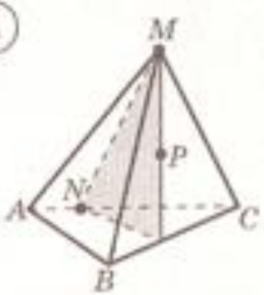
2



3

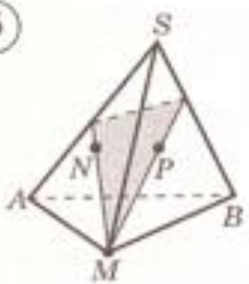


4



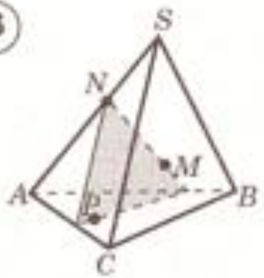
$P \in BMC$

5



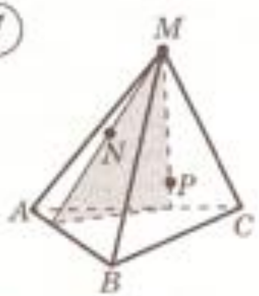
$N \in AMS,\ P \in MSB$

6



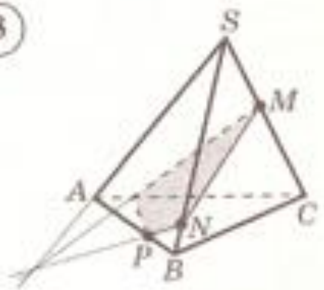
$M \in ASB,\ P \in ABC$

7

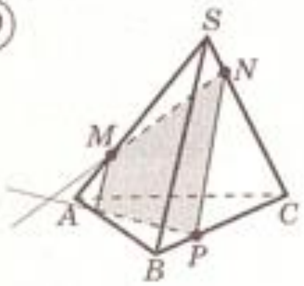


$N \in AMB,\ P \in AMC$

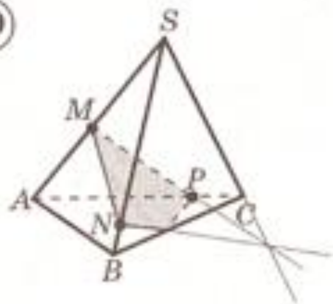
8



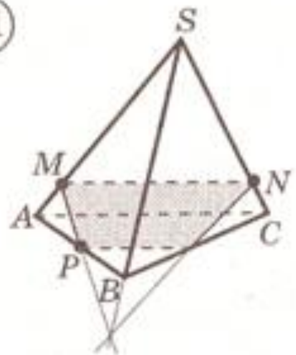
9



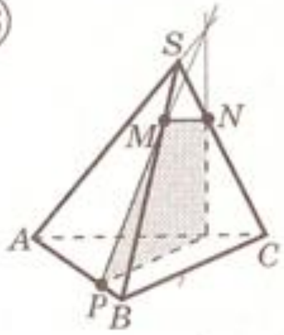
10



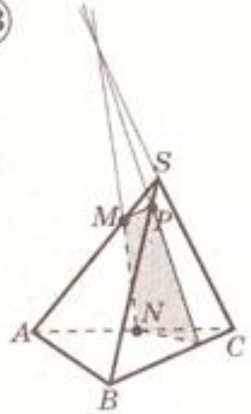
11



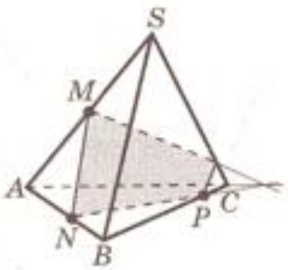
12



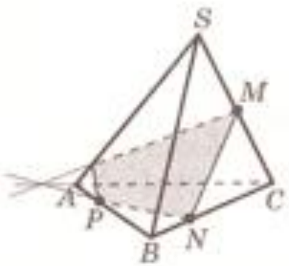
⑬



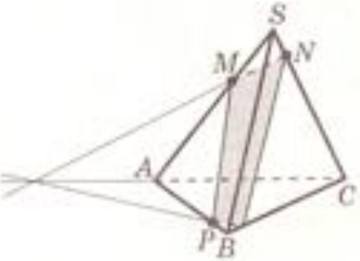
⑭

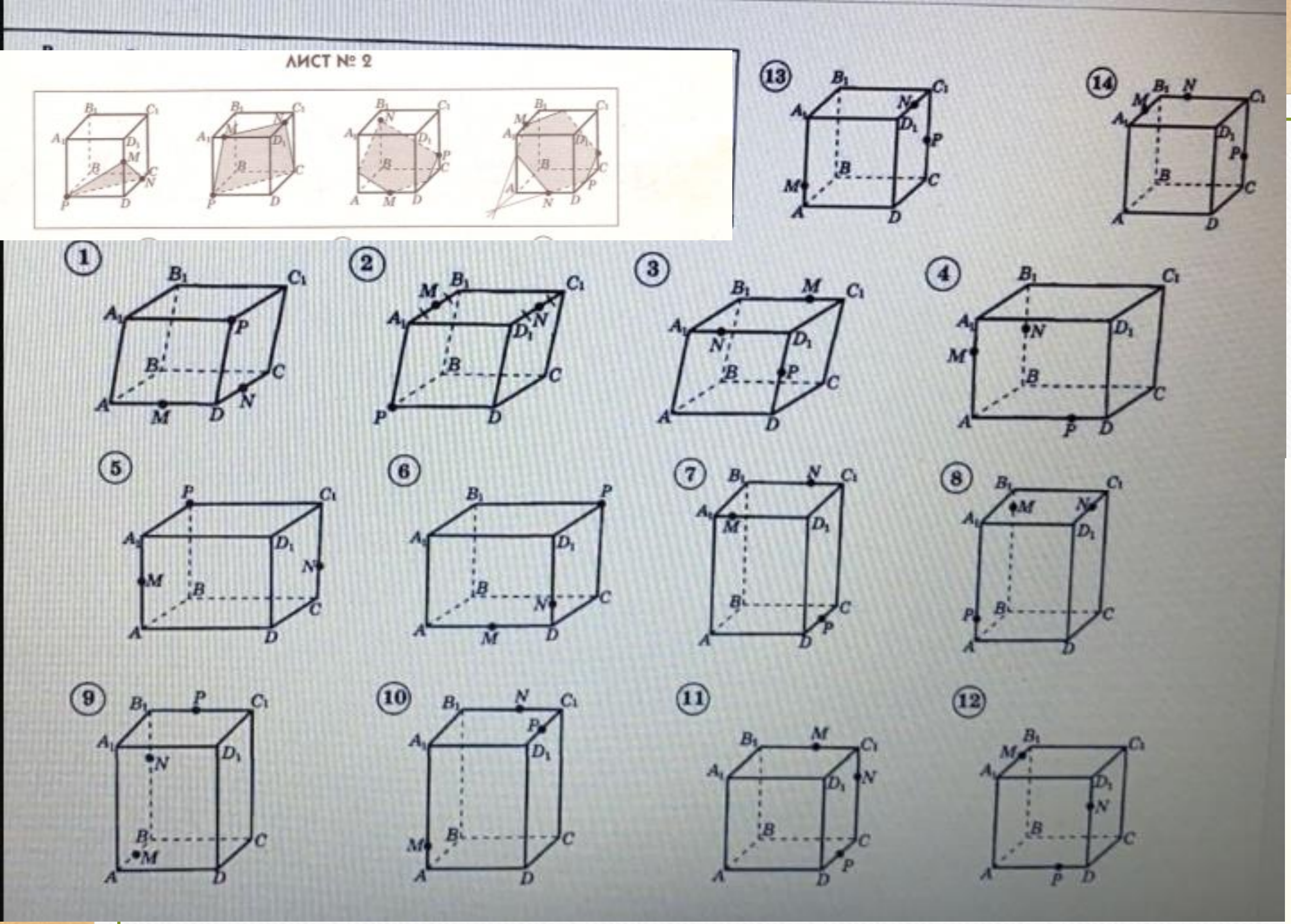


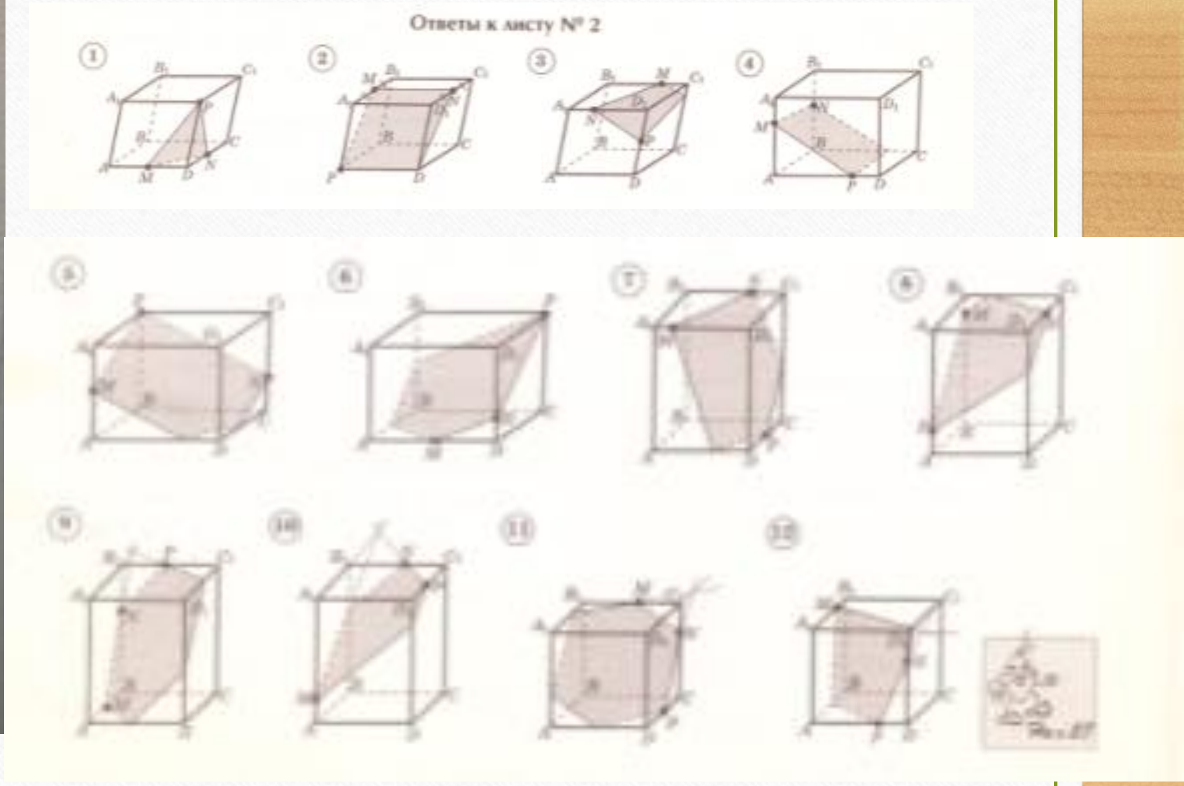
⑮



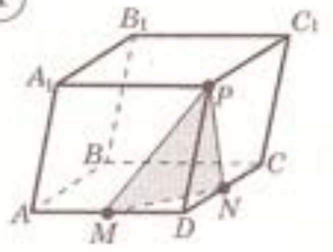
⑯

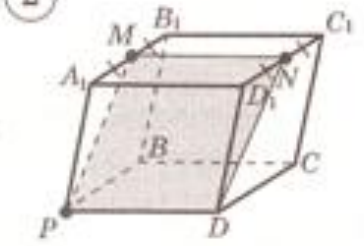


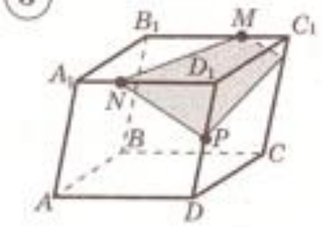

ЛИСТ № 2

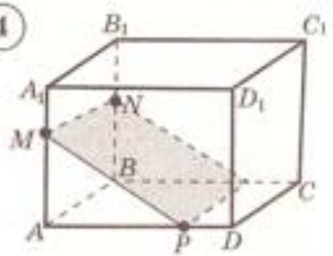

Ответы к листу № 2

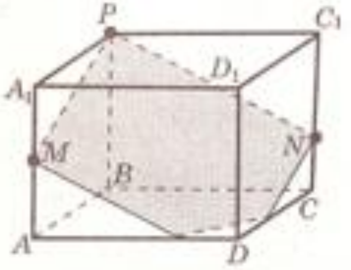
Ответы к А

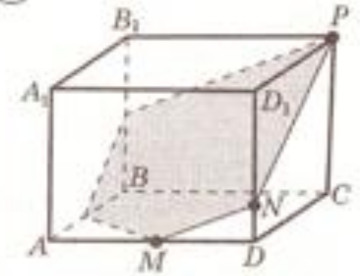
1


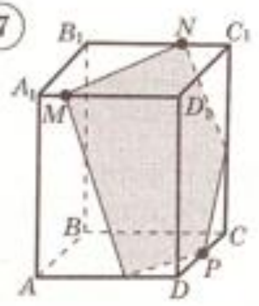
2


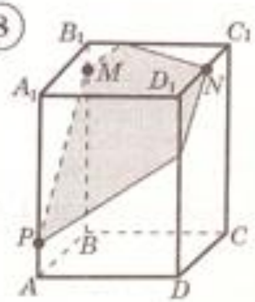
3


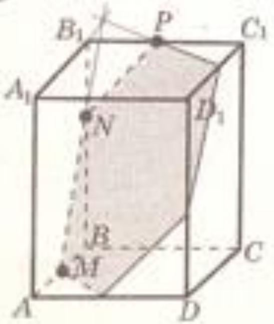
4


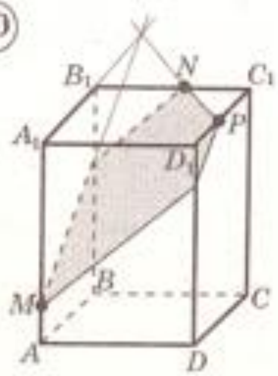
5


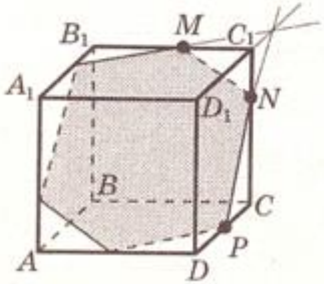
6


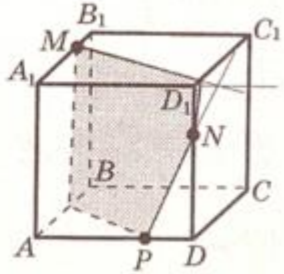
7


8


9


10


11


12


Вычислите (

5.11 а) $\log_2 4^3$;
г) $\log_7 49^4$;

5.12 а) $\log_{\frac{1}{2}} 2$;

5.11 Перейти к основанию 2

$\log_a a^n = n \cdot \log_a a = n$.

$4 = 2^2$

$\log_2 4^3 = \log_2 (2^2)^3 = \log_2 2^{2 \cdot 3} = \log_2 2^6 = 6 \log_2 2 = 6 \cdot 1 = 6$

5.12 $\log_{\frac{1}{2}} 2 = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} = 2^{-1} \\ 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \end{array} \right| = \log_{2^{-1}} 2 = -\log_2 2 = -1$

$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$

$a^{\log_a b} = b$

5.13 а) $\log_{\sqrt{2}} 2$; б) l
г) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{27}$; д) l

5.14 а) $4^{\log_2 3}$; б) 9
г) $25^{\log_5 9}$; д) 8

5.15 а) $2^{\log_{\sqrt{2}} 3}$; б) 3
г) $5^{\log_{\sqrt[3]{5}} 2}$; д) 6

5.16 а) $\log_2 \sqrt[3]{16}$; б) l
г) $\log_{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} 9$; д) l

5.17 а) $\log_6 2 + \log_6 3$;
в) $\log_{15} 5 + \log_{15} 3$;
д) $\log_2 \frac{2}{5} + \log_2 10$;

5.18 а) $\log_2 6 - \log_2 3$;
в) $\log_3 36 - \log_3 4$;
д) $\log_7 \frac{49}{50} - \log_7 \frac{7}{50}$;

$\log_a M + \log_a N = \log_a (MN)$

$\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

5.13 $\log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2 = 2 \cdot \log_2 2 = 2$

5.14 $4^{\log_2 3} = 2^{2\log_2 3} = 2^{\log_2 3^2} = 3^2 = 9$

5.15 $2^{\log_{\sqrt{2}} 3} = 2^{\log_{2^{\frac{1}{2}}} 3} = 2^{2\log_2 3} = 9$

5.16. $\log_2 \sqrt[3]{16} = \log_2 16^{\frac{1}{3}} = |16 = 2^4| = \log_2 2^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$

5.17. $\log_6 \overset{M}{2} + \log_6 \overset{N}{3} = \log_6 (2 \cdot 3) = 1$

5.18 $\log_2 6 - \log_2 3 = \log_2 \left(\frac{6}{3}\right) = \log_2 2 = 1$

$\log_2 3^2 = 2\log_2 3$

5.19 Используя свойство (3)

а) $\log_2 3^2$; б) $\log_4$

г) $2\log_2 3$; д) $3\log$

5.20 Вычислите:

а) $2\log_6 2 + \log_6 9$;

в) $4\log_{12} 2 + 2\log_{12} 3$;

5.21* Докажите, что для $b >$

log

$= \log_6 2^2 + \log_6 9 = \log_6 4\cdot 9 = \log_6 36 =$

$= 2$

$\log_a b^n = n\cdot\log_a b$

$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\cdot\log_a b$

5.21* Докажите, что для $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ и любого γ ($\gamma \neq 0$)

$$\log_a b = \log_{a^\gamma} b^\gamma.$$

$\log_{a^\gamma} b^\gamma = \gamma\log_{a^\gamma} b = \frac{\gamma}{\gamma}\log_a b = \log_a b$

Пользуясь указа

а) $\log_{5^2} 125^2$;

$= \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

5.22 Выразите че

а) $\log_3 5$;

д) $\log_4 2$;

и) $\log_{\frac{1}{4}} 2$;

5.23 Вычислите:

а) $2^{\frac{1}{\log_5 2}}$;

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

5.22. $\log_3 5 = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}$

5.23 $2^{\frac{1}{\log_5 2}} = 2^{\log_2 5} = 5$

$$\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$$

Домашнее задание по алгебре
Выучить свойства логарифмов

По геометрии построить сечения тетраэдра и параллелепипеда,
1) выданные учителем
2) И представленные здесь