Лекция № 5
для студентов 1 курса
обучающихся по специальности
37.05.01 – Клиническая психология (очная форма обучения)

Дифференциальные уравнения первого порядка.

© Составитель: доцент кафедры медицинской
и биологической физики,
к. ф.-м. н. Романова Н.Ю.

План лекции

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные определения.
2. Дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
3. Дифференциального уравнения второго порядка с разделяющимися переменными.
4. Применение дифференциальных уравнений для решения прикладных задач.

Понятие дифференциального уравнения.

В очень большом числе случаев физические законы описывают некоторые соотношения между ***величинами***, характеризующими изучаемый процесс, и ***скоростью изменения этих величин***. Другими словами, эти законы выражаются равенствами, в которых ***участвуют неизвестные функции и их производные***.

Такие равенства называются ***дифференциальными уравнениями***. Они появляются как математическая форма записи ряда физических, биологических, социальных законов.

Изучение процессов, описываемых этими законами, сводится к изучению свойств решений дифференциальных уравнений.

Приведем несколько примеров:

- *Кинетика химических реакций*: c' = f(c, t) (c может означать как концентрацию вещества, так и вектор концентраций).

Кинетические уравнения.
Кинетическое уравнение необратимой реакции первого порядка

$$A \rightarrow B + D$$

$$\boxed{-\frac{dC_A}{dt} = k \cdot C_A} \Rightarrow \frac{dC_A}{C_A} = -k \cdot dt \Rightarrow \int \frac{dC_A}{C_A} = -k \cdot \int dt$$

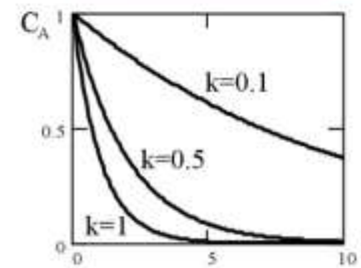
$$\Rightarrow \ln C_A = -k \cdot t + \text{const} \qquad \text{при} \quad t = 0 \quad C_A = C_A^0$$

$$\Rightarrow \ln C_A = -k \cdot t + \ln C_A^0 \Rightarrow \boxed{C_A = C_A^0 \cdot e^{-k \cdot t}}$$

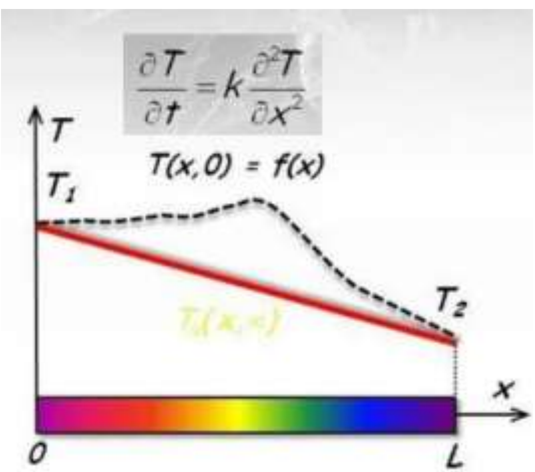
время полупревращения (полураспада)

$$C_A(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \cdot C_A^0$$

$$\boxed{t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k} \cdot \ln 2}$$

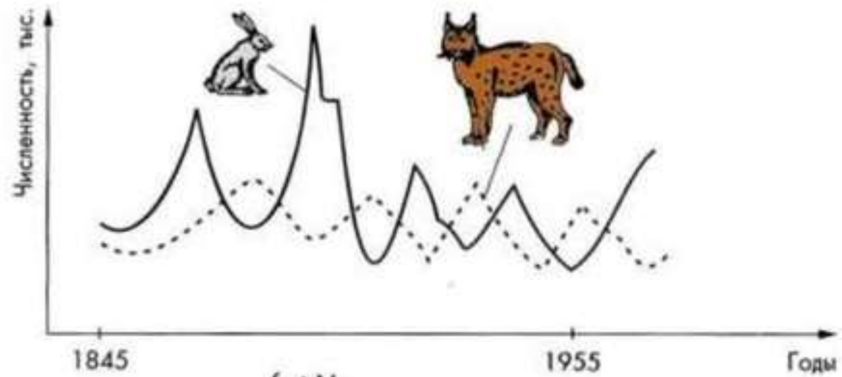


- *Явления переноса* (перенос тепла, массы и импульса). - обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных. Они носят часто эмпирический характер (например, в случае теплоообмена, перемешивания, высушивания, экстракции, адсорбции и многих других).



- *Динамика популяций*. Изменения численности популяций хищников и их жертв можно описать, например, двумя сравнительно простыми дифференциальными уравнениями, предполагая, что известна зависимость рождаемости и гибели отдельных видов животных от их «концентрации».

МОДЕЛЬ ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРА
(по К. Вилли)

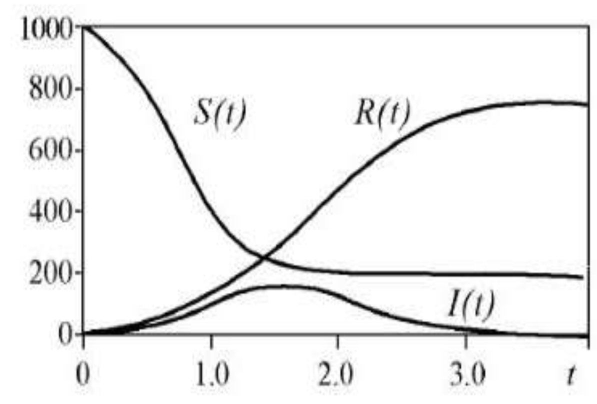


$$\begin{cases} \dfrac{\Delta N_1}{\Delta t} = \underbrace{r_1 N_1}_{\text{рост}} - \underbrace{p_1 N_1 N_2}_{\text{смерть}} \\ \dfrac{\Delta N_2}{\Delta t} = p_2 N_1 N_2 - d_2 N_2 \end{cases}$$

- *Распространение «нового».* Распространение эпидемий, слухов, опыта и мнений в определенных условиях также можно описать дифференциальными уравнениями. Для эпидемий следует учитывать также различия между «здоровыми», «инфицированными», «резистентными» и «изолированными» популяциями. Кинетические закономерности для каждой из этих популяций в соответствии с выбранной моделью могут различаться.

Модификация модели распространения эпидемий

$$\frac{dS}{dt} = -aSI, \quad \frac{dI}{dt} = aSI - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI.$$



Модель Лотки — Вольтерры

Первой содержательной математической моделью, описывающей биологические сообщества была *модель Лотки — Вольтерры*. Она описывает популяцию, состоящую из двух взаимодействующих видов. Первый из них, именуемый *хищниками*, при отсутствии второго вымирает по закону

$x' = -ax$ ($a > 0$),

а второй — *жертвы* — при отсутствии хищников неограниченно размножается в соответствии с *законом Мальтуса ($y'=by$)*. Взаимодействие двух этих видов моделируется так. Жертвы вымирают со скоростью, равной числу встреч хищников и жертв, которое в данной модели предполагается пропорциональным численности обеих популяций, т. е. равной dxy ($d > 0$ - const). Поэтому

$y' = by - dxy$.

Хищники же размножаются со скоростью, пропорциональной числу съеденных жертв:

$x' = -ax + cxy$ ($c > 0$).

Итак, система уравнений

$x' = -ax + cxy$,(1)

$y' = by - dxy$, (2)

Распространение слухов

Скорость затронутых слухами людей N'(t) связана с размером популяции N(t) в момент времени t уравнением:

$$N'(t) = kN(t),$$

где $k > 0$, зависящее от характера общества и внешних условий.

Решениями этого уравнения являются функции

$$N(t) = C \cdot e^{kt}.$$

Постоянную C можно найти из условия, что в момент t = 0 количество осведомленных -

$$N(0)=N_o \text{ -}$$

известна, тогда

$$N(t) = N_o \cdot e^{kt}.$$

Итак, дадим общее определение дифференциального уравнения:

Уравнение, содержащее независимую переменную x, функцию f(x) и ее производные от первого до n-го порядка, называется дифференциальным:

$$F(x,f(x),f'(x),f''(x),\ldots,f^{(n)}(x),C)=0.$$

Порядок дифференциального уравнения определяется ***порядком наивысшей производной***.

Примеры:

$$\frac{dy}{dx} + ky - 3 = 0$$

- дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \boldsymbol{\beta} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{x} = 0$$

- дифференциальное уравнение второго порядка: уравнение гармонического осциллятора

Решением дифференциального уравнения

называется ***функция y=f(x), которая при подстановке обращает это уравнение в тождество.***

Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением***, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется *дифференциальным уравнением в частных производных.*

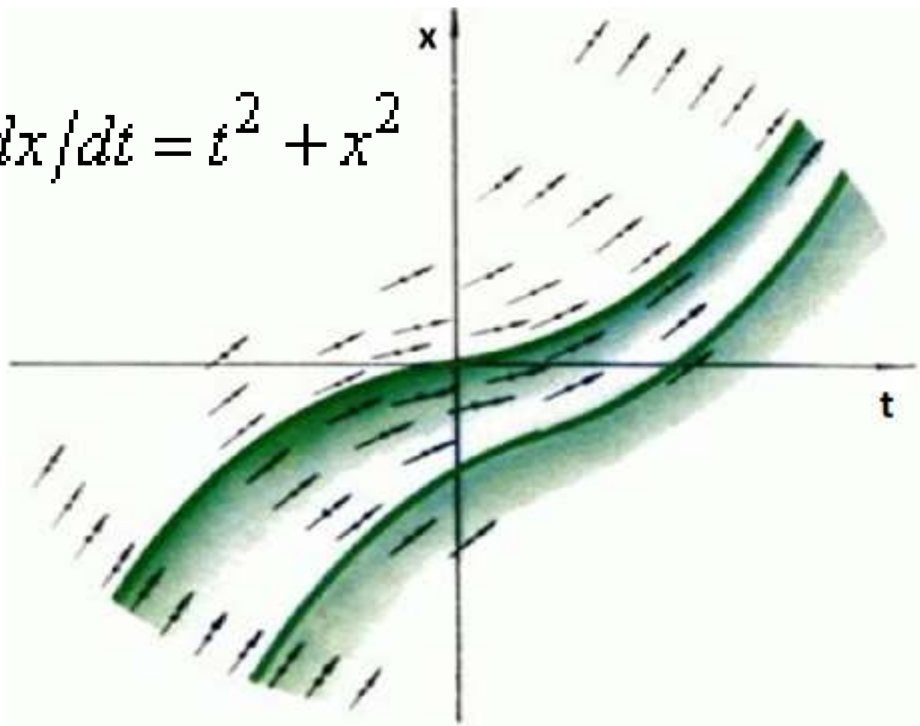
Пример. $x^2y'+y=0$ – обыкновенное ДУ 1-го порядка.

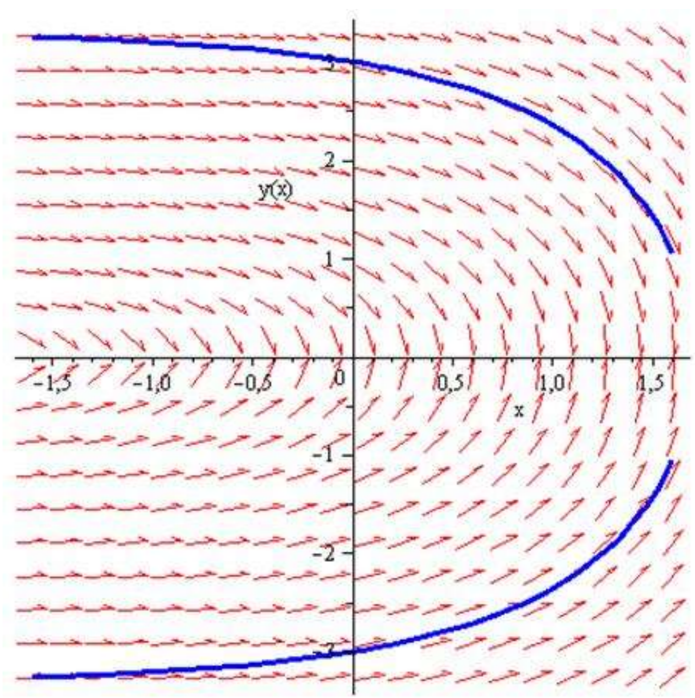
$y=4e^{1/x}$ – его решение, т.к.: $y'=(4e^{1/x})'=4(-1/x^2)e^{1/x}$,

$x^2 \cdot 4(-1/x^2)e^{1/x} + 4e^{1/x} = 0$ – тождество.

Решение дифференциального уравнения есть кривая, которая в каждой точке касается поля направлений, ее называют интегральной кривой. Рис. позволяет довольно ясно представить, как должны выглядеть интегральные кривые этого уравнения:

$$dx/dt = t^2 + x^2$$





Из истории ДУ

- В XVIII в. теория дифференциальных уравнений выделилась из математического анализа в самостоятельную математическую дисциплину. Ее успехи связаны с именами швейцарского ученого И. Бернулли, французского математика Ж. Лагранжа и особенно Л. Эйлера.
- Первый период развития дифференциальных уравнений был связан с успешным решением некоторых важных прикладных задач, приводящих к дифференциальным уравнениям, разработкой методов интегрирования различных видов дифференциальных уравнений и поиском классов интегрируемых уравнений, т.е. таких, решение которых может быть найдено в квадратурах (в виде элементарных функций или их первообразных).
- Однако очень скоро выяснилось, что интегрируемых уравнений совсем не много. Даже уравнение первого порядка очень простого вида может не интегрироваться в квадратурах. Например, уравнение, для которого на рис. было изображено поле направлений, имеет бесконечно много решений, но они не выражаются в квадратурах.
- Установление таких фактов привело к развитию собственно теории дифференциальных уравнений, которая занимается разработкой методов, позволяющих по свойствам дифференциального уравнения определять свойства и характер его решения.

При решении дифференциальных уравнений могут встретиться три типа задач

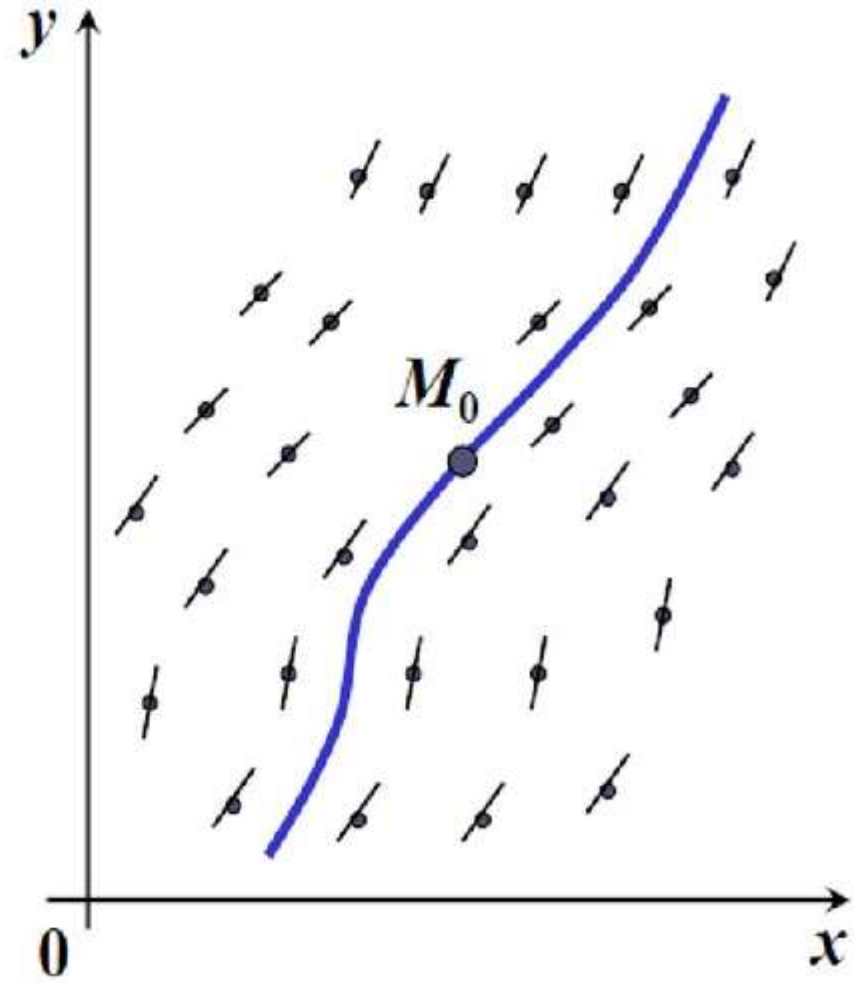
- Дифференциальные уравнения с заданными ***начальными условиями***. Задача поиска решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0)=y_0$, получила в литературе название *задачи Коши*.
- ***Краевая задача***. В этом случае известны значение функции или ее производных в определенных точках, и необходимо найти решение между этими точками.
- Задачи на ***собственные значения***. Задачи этого типа очень похожи на краевую задачу. Например, дифференциальное уравнение, описывающее колебания струны. Краевые условия в этом случае определены, поскольку струна закреплена с обеих сторон. В дифференциальное уравнение, описывающее колебания струны, входит параметр, который по смыслу задачи соответствует «длине волны». Нужно найти, какие значения может принимать этот параметр, т. е. при каких значениях параметра решение дифференциального уравнения удовлетворяет краевым условиям.

Решить задачу Коши

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

означает **найти интегральную кривую** дифференциального уравнения, проходящую через заданную точку M_0 (x_0, y_0).



Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, y, y') = 0$$

называется *уравнением с* ***разделяющимися переменными***, если оно может быть представлено в виде

$$y' = g(x)h(y)$$

или

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

Разнося переменные *x* и *y* и их дифференциалы в разные стороны такого уравнения, получаем

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$$

Таким образом, чтобы найти эту функциональную связь в виде *y=y(x), x=x(y)* или *f(x,y)=*0, надо проинтегрировать каждую из частей дифференциального уравнения, откуда получаем:

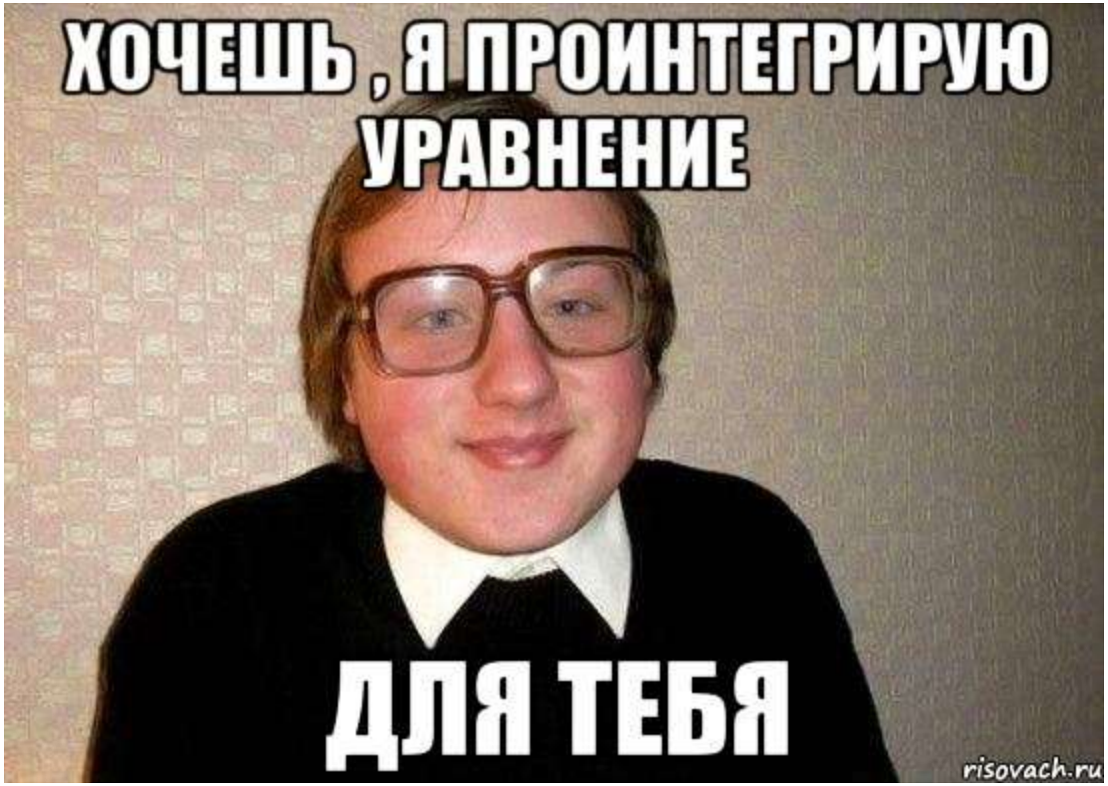
$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx \qquad \int \frac{dy}{h(y)} = H(y) + c_1 \qquad \int g(x)dx = G(x) + c_2$$

и затем приравнять их $H(y)+c_1=G(x)+c_2$. Вместо двух постоянных c_1 и c_2 обычно берется одна $c=c_2-c_1$, и тогда общее решение дифференциального уравнения записывается в виде:

$$\boldsymbol{H(y)=G(x)+c}$$

Общее и частное решение дифференциального уравнения

- Константа может быть выбрана в любом виде (произвольно) для удобства решения. Например, С можно заменить на С/2 или ln С. И тогда получают ***общее решение*** дифференциального уравнения.
- Если же заданы ***начальные или граничные условия***, то константа вычисляется и имеет вполне определенное значение. Тогда можно говорить о ***частном решении*** дифференциального уравнения.


ХОЧЕШЬ , Я ПРОИНТЕГРИРУЮ УРАВНЕНИЕ
ДЛЯ ТЕБЯ
risovach.ru

Пример.

Найти решение уравнения: $y'=2xy$,

если $y=2$ при $x=0$

Решение. Перепишем уравнение и разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx}=2xy \qquad \frac{dy}{dx}=2xy \qquad dy/y=2xdx$$

Проинтегрируем: $\int dy/y=\int 2xdx$

$$\ln y=x^2+C_1 \Rightarrow y=e^{x^2+c_1}=e^{c_1}\cdot e^{x^2}$$

Приняв $e^{c_1}=C$, запишем общее решение:

$$y=C\cdot e^{x^2}$$

Проверка:

$$(C \cdot e^{x^2})' = 2 \cdot x \cdot C \cdot e^{x^2} = 2 \cdot x \cdot C \cdot e^{x^2}$$

Полученное тождество подтверждает, что найденная функция есть решение данного уравнения.

Частное решение. Для нахождения постоянной С используем начальные условия:

y(0)=2

Подставив эти значения в общее решение, получим:

$2 = C \cdot e^0 = C$,

следовательно, С=2.

Получим частное решение:

$$y = 2 \cdot e^{x^2}$$

Дифференциальные уравнения 2 порядка

С разделяющимися переменными:

$$y'' = f(x)$$

1 шаг:

Введем новую функцию: $u(x)=y'(x)$

$$u'(x)=f(x);$$

$$\frac{du}{dx} = f(x)$$

$$\int du = \int f(x)dx$$

$$u=F(x)+C$$

2 шаг:

$$\frac{dy}{dx}=F(x)+C$$

$$dy=F(x)dx+Cdx$$

$$\int dy=\int F(x)dx+\int Cdx$$

$$y=\varphi(x)+Cx+C_1$$

- общее решение дифференциального уравнения 2 порядка

Пример:

$y'' - 2x = 0$

1. $y' = u(x);\ u' = 2x$

$\frac{du}{dx} = 2x \qquad du = 2x\,dx \qquad \int du = \int 2x\,dx$

$u = x^2 + C$

2. $y' = u(x) = x^2 + C; \qquad \frac{dy}{dx} = x^2 + C$

$dy = x^2 dx + C dx \qquad \int dy = \int x^2 dx + \int c\,dx$

$\boxed{y = \frac{x^3}{3} + Cx + C_1}$ - общее решение

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

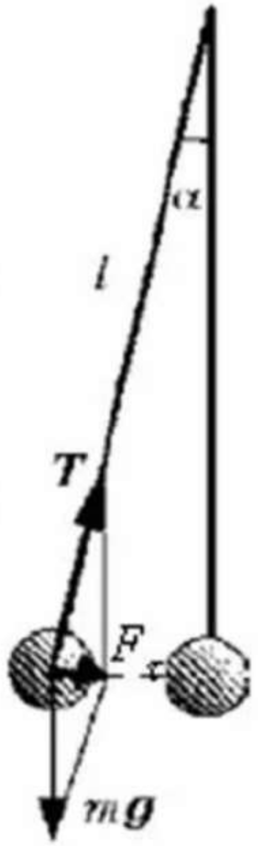
Это уравнения вида:

$$y''+py'+qy=0,$$

где p и q – натуральные числа.

Для нахождения общего решения линейного однородного уравнения 2–го порядка достаточно знать фундаментальную систему частных решений $y_1(x)$, $y_2(x)$. Тогда общее решение получается как линейная комбинация $y(x)$:

$$y(x)=C_1y_1+C_2y_2.$$



$F_{ТР} = -r \cdot \upsilon.$

Если в системе, кроме квазиупругой силы, действует еще сила трения, то второй закон Ньютона можно записать так:

$$ma = -mg\frac{X}{L} - r \cdot \upsilon,$$

или в дифференциальной форме

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -mg\frac{X}{L} - r\frac{dX}{dt}.$$

После преобразования получаем дифференциальное уравнение затухающих колебаний:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\beta\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0 \longrightarrow x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0$$

Для определения фундаментальной системы решений составляем характеристическое уравнение заменой y″, y′ , y соответственно на k^2, k и 1:

$$k^2+pk+q=0.$$

Характеристическое уравнение имеет два корня:

$$\boxed{k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

Эти корни могут быть действительными различными, действительными равными или комплексно сопряженными:

<table>
<tr><td colspan="3">Дифференциальное уравнение</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y''+py'+qy=0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Характеристическое уравнение</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\boldsymbol{k^2+pk+q=0}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Корни характеристического уравнения</td></tr>
<tr><td>$k_1 \neq k_2$</td><td>$k_1 = k_2$</td><td>$k_1=\alpha+i\beta$
$k_2=\alpha-i\beta$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Фундаментальная система решений</td></tr>
<tr><td>$e^{k_1 x}$
$e^{k_2 x}$</td><td>$e^{k_1 x}$
$xe^{k_1 x}$</td><td>$e^{\alpha x}\sin\beta x$
$e^{\alpha x}\cos\beta x$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Вид общего решения</td></tr>
<tr><td>$y=C_1\cdot e^{k_1 x}+C_2\cdot e^{k_2 x}$</td><td>$y=e^{k_1 x}\cdot(C_1+C_2 x)$</td><td>$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$</td></tr>
</table>

Примеры:

$2y''+3y'-2y=0$. Составим характеристическое уравнение $2k^2+3k-2=0$, откуда $k_1=0{,}5$, $k_2=-2$. Следовательно, $y=C_1e^{0{,}5x}+C_2e^{-2x}$.

$y''-2y'+y=0$. $k^2-2k+1=0$, $k_1=k_2=1$, $y=e^x(C_1+C_2x)$.

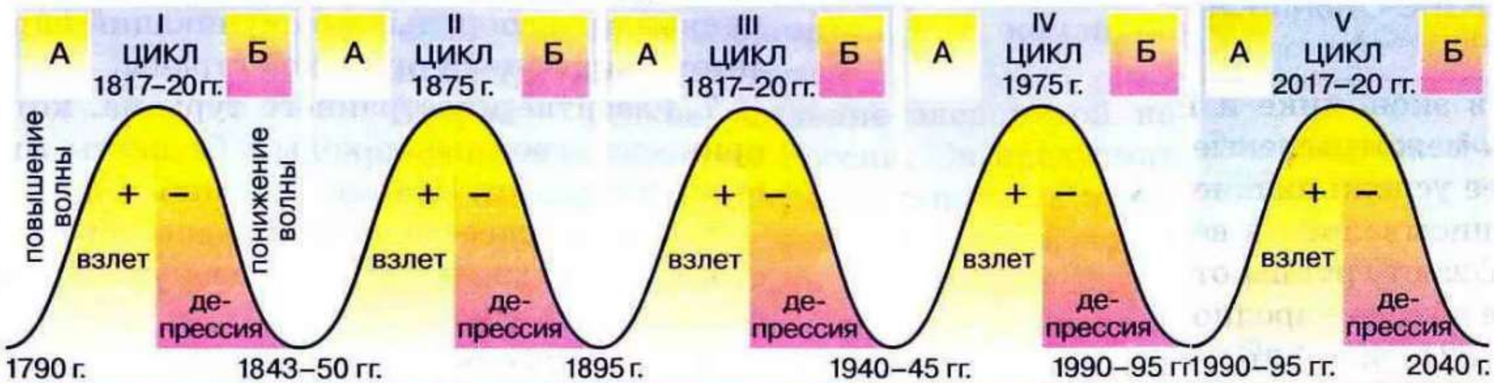
$y''+2y'+10y=0$. Характеристическое уравнение $k^2+2k+10=0$ будет иметь комплексно сопряженные корни:

$k_{1,2}=-1\pm 3i$ ($\alpha=-1$, $\beta=3$),

следовательно: $$y=e^{-x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)$$

Циклы Кондратьева

БОЛЬШИЕ ЦИКЛЫ Н. Д. КОНДРАТЬЕВА



ЦИКЛЫ СМЕНЫ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ УКЛАДОВ

	I ПРОМЫШЛЕННАЯ РЕВОЛЮЦИЯ ПАРА И УГЛЯ	II ПРОМЫШЛЕННАЯ РЕВОЛЮЦИЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ И НЕФТИ			III ПРОМЫШЛЕННАЯ РЕВОЛЮЦИЯ ЯДЕРНОЙ ЭНЕРГИИ, МИКРОЭЛЕКТРОНИКИ
ТЕХНОЛОГИИ	Паровая машина, ткацкий станок	Коксодоменная металлургия, железнодорожный транспорт, паровое судоходство	Электроэнергетика, автомобилизация, авиация, химическая промышленность (неорганика)	Электроника, реактивная авиация, космические аппараты, ядерная энергетика, химия органического синтеза	Микроэлектроника, информатика, лазерная техника керамика вместо металла, космические технологии
ГЕОГРАФИЯ	Промышленные города (Англия, затем другие страны Европы)	Угольно-металлургические базы (Рур, Пенсильвания, Донбасс, Силезия, Англия, ж/д сеть США, Европы, России)	Районы тяжелой промышленности, энергосистемы и автодорожная сеть	Крупнейшие агломерации, центры ВПК, технополисы	Технополисы

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

Основная литература:

- Ганичева, А.В. Математика для психологов /А.В. Ганичева, В.П. Козлов. – М.: Аспект Пресс, 2005. – 239с.
- Кричевец, А.Н. Математика для психологов /А.Н. Кричевец, Е.В. Шикин, А.Г. Дьячков. – М.: Флинта: НОУ ВПО «МПСИ», 2010.– 376 с.

Электронные ресурсы:

- ЭБС КрасГМУ.
- Ресурсы Интернет.

Красноярский Государственный Медицинский Университет им. проф. В.Ф.Войно-Ясенецкого

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ