Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Красноярский государственный медицинский
университет имени профессора В.Ф. Войно-Ясенецкого»
Министерства здравоохранения Российской Федерации

Фармацевтический колледж

Математика

Рабочая тетрадь
к практическим заданиям по алгебре
на базе основного общего образования

Красноярск
2019

УДК 51(076.5)
ББК 22.1+22.14
М34

Составитель: И. П. Клобертанц

Математика: рабочая тетрадь к практ. занятиям по алгебре на базе основного общего образования / сост. И. П. Клобертанц ; Фармацевтический колледж. – Красноярск : тип. КрасГМУ, 2019. - 158 с.

Рабочая тетрадь по алгебре к практическим занятиям по дисциплине БД.05. Математика предназначена для аудиторной работы обучающихся, соответствует требованиям ФГОС СОО (2014 г.), рабочей программы дисциплины (2018 г.); адаптирована к образовательным технологиям с учетом специфики обучения.

Рекомендован к изданию по решению методического совета фармацевтического колледжа (Протокол № 5 от 29.01.2019 г.)

УДК 51(076.5)
ББК 22.1+22.14

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ. РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ

Занятие № 1

Тема «Числовые системы. Целые и рациональные числа. Действительные числа»

Вопросы:

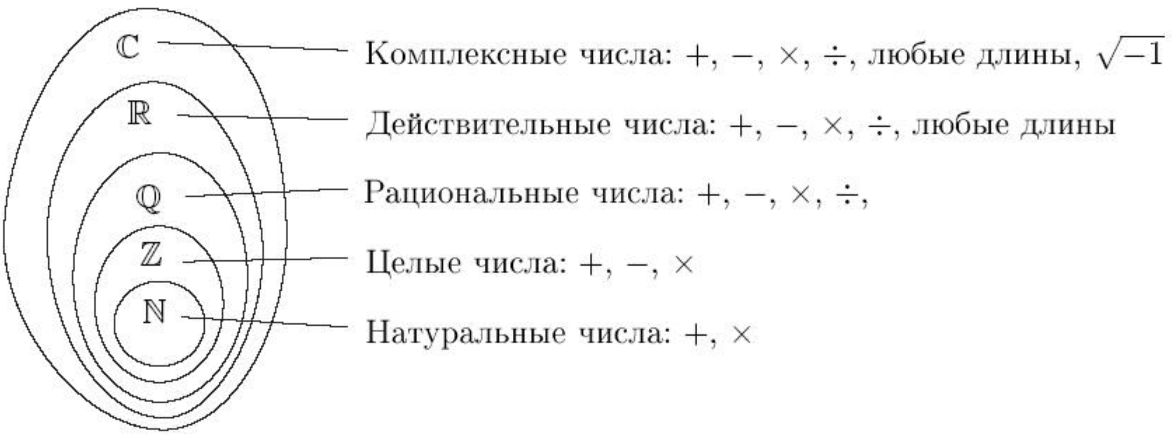
1) Что такое число?____
2) Какие числа бывают? Приведите классификацию.

____
____
____
____

3) Зачем человеку нужно было придумывать различные множества чисел?

____
____
____

В помощь студенту:



Комплексные числа имеют вид: z=a+bi, где a,b – действительные числа
i – некоторый символ, который $i^2=-1$
а - действительная часть комплексного числа, b – мнимая часть комплексного числа.

Действия над комплексными числами:

1. Суммой комплексных чисел z=(a; b) и w=(c; d) называют комплексное число (a+c; b+d)
2. Числом, противоположным числу z=(a; b), считают число (-a; -b). Обозначают –z
3. Разностью комплексных чисел z=(a; b) и w=(c; d) называют комплексное число (a-c; b-d)
4. Произведением комплексных чисел z=(a; b) и w=(c; d) называют комплексное число (ac-bd; ad+bc)
5. Деление комплексных чисел:

$$\frac{(a;b)}{(c;d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2};\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

6. Возведение в степень мнимой единицы:
6.

$$\mathbf{i}^n=\begin{cases} i,\ \text{если } n=4k+1 \\ -1,\ \text{если } n=4k+2 \\ -i,\ \text{если } n=4k+3 \\ 1,\ \text{если } n=4k \end{cases}$$

Решение квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом:

Корни любого квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$
$D=b^2-4ac$
$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, если D<0, то $\sqrt{D}=i\sqrt{|D|}$

Задания:
Решить:

1. $\frac{5}{6}+\frac{7}{33}=$____
2. $\frac{6}{11}:\frac{5}{8}\cdot\frac{9}{40}+0{,}01=$____________
3. $\left(1-\frac{1}{11}+\frac{1}{121}\right):\left(\frac{8}{20}+\frac{4}{12}\right)=$________________________________

____
____
____
____

4. Представить в виде обыкновенной дроби.
   a) 0,125=______________________
   b) 0,46=_______________________
   c) 7,11=_______________________
5. Представьте в виде десятичной дроби.
   a) $\frac{1}{125}=$____________
   b) $\frac{7}{16}=$_____________
   c) $\frac{141}{11}=$____________
   d) $\frac{48}{9}=$____________
6. Сравните числа 1, 357 и $\sqrt{2}$

7. Дано два комплексных числа $z_1=4+2i$, $z_2=2+3i$. Выполните действия над числами.

Решение:____
____
____
____
____
____

8. Решите уравнения:
   a) $x^2+9=0$
   b) $x^2-2x+17=0$
   c) $x^3+8=0$

Решение:____
____
____
____
____
____

9. Найти комплексное число z из уравнения $(1+i)z=-2+3i$

____
____

10. Вычислите $i^2 + i^3 + i^6 =$______________________________

Домашняя работа

Вариант 1

Вычислите значение выражений:

1) $\frac{2+3i}{3+2i} - 5 + 6i$
2) $x^2 + 7x + 100 = 0$

Вариант 2

Вычислите значение выражений:

1) $\frac{2-3i}{3+2i} + 5 + 6i$
2) $x^2 - 11x + 90 = 0$

Решение:______________________________

Занятие № 2

Тема «Приближенные вычисления и вычислительные средства. Погрешности»

В помощь студенту:

Правило:

Чтобы округлить число до единицы определенного разряда, надо отбросить все цифры, стоящие после цифры этого разряда, а в целом числе заменить их нулями. При этом учитывают следующее:

1) если первая (слева) из отбрасываемых цифр менее 5, то последнюю оставленную цифру не изменяют (округление с *недостатком);*
2) если первая отбрасываемая цифра больше 5 или равна 5, то последнюю оставленную цифру увеличивают на единицу (округление с *избытком).*

Абсолютной погрешностью приближенного значения называется модуль разности точного и приближенного значения.

$\Delta a = \left| a - \bar{a} \right|$, где $\bar{a}$ - приближенное значение числа а.

Например:

а =2,25 , $\bar{a} \approx 2{,}3$.

Δа =|2,25- 2,3|= 0,05 –абсолютная погрешность

Относительной погрешностью приближенного значения называется отношение абсолютной погрешности приближенного числа к самому этому числу.

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\left| a - \bar{a} \right|}{a} \ (\%)$$

Например: а =14,7, т.е. $\bar{a} \approx 15$

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\left| a - \bar{a} \right|}{a} = \frac{\left| 14{,}7 - 15 \right|}{14{,}7} = 0{,}02 \text{ или } 2\%$$

Пример:

В аудитории находится 197 учащихся. Округляем это число до 200. Абсолютная погрешность составляет 200 - 197 = 3. Относительная погрешность равна 3/197 или, округленно, 3/197 = 1,5 %.

Задания.

1. Округлите:

а) до единиц

36,7 =________

189,51 =______

51,3 =________

3,019 =_______

б) до сотых

0,1559 =_______

7,098 =_________

1,0036 =________

в) до десятых 2,653 =_______

2. Какие из перечисленных величин являются точными, а какие – приближенными:

– толщина книги 25 мм;
– температура воздуха 19° С;
– в самолете 122 пассажира;
– скорость звука в воздухе 322 м/с;
– масса дыни 3.2 кг;

– стоимость ручки 3 рубля;
– угол в тетради 50° .

3. Что называется относительной/ абсолютной погрешностью приближенного значения?____
____
____
____

4. Следующие рациональные числа записать в виде конечных или периодических бесконечных десятичных дробей:

1) $\frac{5}{7}$ =_____; 2) $\frac{13}{400}$ =_______ 3) $-\frac{17}{36}$=_______ ; 4) $-\frac{1870}{1496}$=_______ ; 5) $\frac{39}{625}$ =___.

5. Округлить число до единиц и найдите абсолютную и относительную погрешность:

1) 0,9

Абсолютная погрешность :_______________________________________

Относительная погрешность: ______________________________________

2) 5,6

Абсолютная погрешность :_______________________________________

Относительная погрешность: ______________________________________

3) 19,5

Абсолютная погрешность :_______________________________________

Относительная погрешность: ______________________________________

4) 256,49

Абсолютная погрешность :_______________________________________

Относительная погрешность: ______________________________________

6. Одновременно различными приборами измерили температуру пара и получили в первом случае t=$(104\pm1)^0$C , во втором t=$(103,8\pm0,1)^0$C , в третьем t=$(103,86\pm0,01)^0$C. Вычислить относительную погрешность каждого измерения.

Решение:
____
____
____
____
____

Лабораторная работа

1. Выполните действия с приближенными данными:

а) 12,384+42,1083-51,27=__________

б) $1,5*10^6+2,35*10^5-3,17*10^5=$_______

в) 23,67:7,85-31,3:2,46=_______

г) $3,57^2=$______

д) $2,5874^{-4}=$________

е) $\sqrt{1,753}=$_______

ж) $\sqrt[3]{0,00059342}=$______

2. Вычислите с точностью до 0,001:

а) $\sin 12^0=$___________

б) $\cos 27^0 47'=$________

в) $\sin\frac{\pi}{5}=$__________

Домашняя работа

1. Округляя следующие числа до трех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученных приближенных чисел:

а) 0,003922

б) 1,225

в) 0,1545

2. Определить абсолютную погрешность следующих приближенных чисел по их относительным погрешностям:

а) a=0,896, ε=10%

б) a=2,32, ε=0,7%

Решение:

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

Занятие № 3
Тема «Проценты»

В помощь студенту:

Процент – это сотая часть единицы. Запись 1% означает 0.01.

Правило 1. Чтобы найти данное число процентов от числа, нужно проценты записать десятичной дробью, а затем число умножить на эту десятичную дробь

Правило 2. Чтобы найти, сколько процентов одно число составляет от другого, нужно разделить первое число на второе и полученную дробь записать в виде процентов.

Правило 3. Чтобы найти процентное отношение двух чисел А и В, надо отношение этих чисел умножить на 100%, то есть вычислить (а/в)*100%.

Правило 4. Чтобы найти число по данным его процентам, надо выразить проценты в виде дроби, а затем значение процентов разделить на эту дробь.

Процентное содержание вещества в растворе (например, 15%), иногда называют %-м раствором, *например,* 15%-й раствор соли.

Если концентрация вещества в соединении по массе составляет р%, то это означает, что масса этого вещества составляет р% от массы всего соединения.

Если известно процентное содержание вещества, то его концентрация находится по формуле:

К= р/100% к - концентрация вещества;

р - процентное содержание вещества (в процентах).

Чтобы увеличить положительное число а на р процентов, следует умножить число а на коэффициент увеличения **к =(1+0,01р).**

Чтобы уменьшить положительное число а на р процентов, следует умножить число а на коэффициент уменьшения **к = (1-0,01р).**

Правило 5. Чтобы найти, на сколько % положительное число у отличается от положительного числа а, следует вычислить, сколько % у составляет от а, а затем от полученного числа отнять а.

Задания:

1. Определение процента от числа

Найти: 25% от 120.

Решение: ____

2. Определение числа по известной его части, выраженной в процентах

Найти число, если 15% его равны 30.

Решение: ____

3. На сколько процентов 10 больше 6?

На сколько процентов 6 меньше 10?

Решение:

____
____
____
____
____
____

4. Что произойдет с ценой товара, если сначала ее повысить на 25%, а потом понизить на 25%?

Решение:____
____
____
____
____
____

5. Свежие грибы содержали по массе 90% воды, а сухие 12%. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?

Решение:

____
____
____
____
____
____

6. Сколько кг соли в 10 кг соленой воды, если процентное содержание соли 15%.

Решение:

____
____
____
____
____
____

7. Сплав содержит 10 кг олова и 15 кг цинка. Каково процентное содержание олова и цинка в сплаве?

Решение:

____
____
____
____
____
____

8. К 15 л 10%-ного раствора соли добавили 5%-ный раствор соли и получили 8%-ный раствор. Какое количество литров 5%-ного раствора добавили?

Решение:

____
____
____
____
____
____

Домашняя работа

1. Лекарственный препарат подорожал на 30%. Сколько препаратов можно теперь купить на деньги, на которые раньше покупал 3,9 кг?
2. Средний рост мальчиков того же возраста, что Саши, равен 150 см. Рост Саши на 8 % выше среднего. Какой рост у Саши?
3. Студент после серии тренировок улучшил свой результат на 0,25 от исходного результата. На сколько процентов студент улучшил результат?
4. Сколько литров воды нужно взять, чтобы из 200 г соли приготовить 5% раствор? (Масса 1 л воды равна 1 кг)
5. В сосуд, содержащий 10 литров 24-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 5 литров воды. Сколько процентов составит концентрация получившегося раствора?
6. В одну банку мама налила 480 г воды и насыпала 120 г сахара, в другую – 840 г воды и 160 г сахара. В какой банке вода слаще?
7. Какой раствор получится при смешивании 200 г 50% раствора соли и раствора, в котором 150 г соли составляют 25%?

8. Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составляла 1,5%?

9. Найти 35% от 1000 рублей.

10. На сколько процентов был выполнен и % перевыполнен план, если предполагался доход 800 рублей, а в итоге получили 1040 рублей?

11. Сумма без НДС равна 1000 рублей. Сколько будет общая сумма с НДС 18%?

Решение:

РАЗДЕЛ. КОРНИ, СТЕПЕНИ И ЛОГАРИФМЫ

Занятие № 4

Тема «Корень и его свойства»

В помощь студенту:

Опр: Корнем n-степени из числа **a** называется такое число, n-степень которого равна **a**.

Опр: Арифметическим корнем **n** – степени из числа **a** называют неотрицательное число, **n** – степень которого равна **a**.

Пример: $\sqrt[6]{64} = 2$ или -2, т.к. $(2)^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$

Основные свойства корней

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b \neq 0)$

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \; (k > 0)$

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} (k > 0)$

$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$

Для любых чисел a и b, таких что $0 \le a < b$, выполняется неравенство $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

Примеры:

1. $\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 27}$

Решение:

Для решения воспользуемся свойством корней $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Вычислим:
$\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 27} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{27}$=5·4·3=60

2. $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$

Решение:
Обратим смешанное число в неправильную дробь. Имеем: $5\frac{1}{16} = 5 + \frac{1}{16} = \frac{81}{16}$

Воспользуемся свойством корней $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b \neq 0)$. Получим:

$$\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

3. $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9}$

Решение:

Любая формула в алгебре, используется не только «слева направо», но и «справа налево». Первое свойство корней означает , что число $\sqrt[n]{ab}$ можно представить в виде

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ и наоборот. Это относится ко всем свойствам корня. Учитывая это, выполним вычисления:

$\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{24 \cdot 9} = \sqrt[3]{8 \cdot 3 \cdot 9} = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$

$24=8\cdot 3$

4. $\sqrt[12]{a^8}$

Решение:

Для решения воспользуемся свойством корней $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}\ (k > 0)$

$\sqrt[12]{a^8}=\sqrt[4\cdot 3]{a^{4\cdot 2}} = \sqrt[3]{a^2}$

Проверь себя:

Вычислить:

а) $\left(\sqrt[7]{-8}\right)^7$

Решение:

____

____

____

____

____

Ответ: ____________

б) $\sqrt[3]{125 \cdot 0{,}027}$

Решение:

____

____

____

____

____

Ответ: ____________

в) $\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt{3}$

Решение:

____

____

____

____

____

Ответ: ____________

г) $\frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}}$

Решение:

____

____

____

____

____

Ответ: ____________

д) $\sqrt[6]{15^6}$

Решение:

____

Ответ: ____________

е) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$

Решение:

____
____
____
____
____

Ответ: ____________

ж) $\sqrt[5]{-27} \cdot \sqrt[5]{9}$

Решение:

____
____
____
____
____

Ответ: ____________

з) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{256}}$

Решение:

____
____
____
____
____

Ответ: ____________

Ответы:

а)	б)	в)	г)	д)	е)	ж)	з)
-8	1,5	3	2,5	15	$\frac{3}{4}$	-3	0,5

Сделай сам:

1. Найдите значения выражения:

а) $\sqrt[4]{81}$

Решение:

____
____
____
____
____

Ответ: ____________

б) $\sqrt[5]{32}$

Решение:

____
____
____
____
____

Ответ: ____________

в) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$

Решение:

____
____
____
____
____

Ответ: ____________

г) $\sqrt[3]{0{,}125}$

Решение:

____
____
____
____
____

Ответ: ____________

д) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

Решение:

____
____
____
____
____

Ответ: ____________

е) $\sqrt[7]{-128}$

Решение:

____
____
____
____
____

Ответ: ____________

2. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{\sqrt{7}} \to (\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a})$

Решение:

____
____
____
____
____

Ответ: ____________

б) $\sqrt[12]{10^{16}} \to \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}\ (k > 0)$

Решение:

____
____
____
____
____

Ответ: ____________

3. Решить:

а) $\sqrt[4]{16}$=__________

б) $\sqrt[5]{3125}$=_________

в) $\sqrt[4]{6561}$=__________

г) $\sqrt[3]{64}$=__________

д) $\sqrt[6]{-729} =$ ______

е) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$=__________

ж) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$=__________

4. Решить:

а) $\sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{-8}$=____

б) $\sqrt[4]{625} - \sqrt[3]{-125}$=____

5. Вычислить:

а) $\sqrt{841}$=__________

б) $\sqrt{0{,}0625}$=__________

6. Вычислить:

а) $\sqrt[3]{8 * 27}$=____

б) $\sqrt{16 * 0{,}0001}$=____

в) $\sqrt[3]{5^6 * 2^9}$=____

г) $\sqrt[5]{0{,}2^{10} * 10^{10}}$=____

д) $\sqrt[4]{\frac{7^8}{3^4}}$=____

е) $\sqrt[3]{\frac{5^6}{3^9}}$=____

7. Решите уравнение:

x^4-16=0

Решение:____
____
____
____
____
____
____
____

x^3+27=0

Решение:____
____
____
____
____
____
____
____

Занятие № 5

Тема «Степень и ее свойства»

В помощь студенту:

Опр: Степенью числа $a > 0$ *с рациональным показателем* $r = \frac{m}{n}$, где m - целое число, n- натуральное $(n > 1)$, называется число $\sqrt[n]{a^m}$.

Пример: $7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2}$

Основные свойства

Для любых рациональных чисел r и s и любых положительных a и b справедливы следующие равенства:

1)$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

2)$a^r \div a^s = a^{r-s}$

3)$(a^r)^s = a^{rs}$

4)$(ab)^r = a^r \cdot a^r$

5)$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

6) Пусть r-рациональное число и 0<a<b . Тогда

$a^r < b^r$ при r>0, $a^r > b^r$ при r<0

7) Для любых рациональных чисел r и s из неравенства r>s следует, что

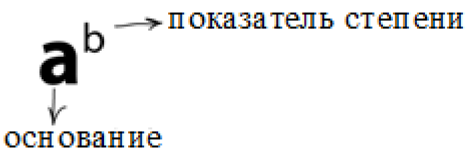
$a^r > a^s$ при a>1

$a^r < a^s$ при 0<a<1

В помощь студенту

Степень с целым числом:

$a^n = a \cdot a \cdot .... \cdot a$ (n- раз), $a^1 = a$, $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$



Примеры:

1. Представить в виде степени с рациональным показателем: $\sqrt[7]{x^{-3}}$.

Решение: по определению имеем: $\sqrt[7]{x^{-3}} = x^{\frac{-3}{7}}$

2. Представить в виде корня из степени с целым показателем: $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

3. Вычислить: $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}} = 2^{\frac{4}{5}+\frac{11}{5}} = 2^{\frac{4+11}{5}} = 2^{\frac{15}{5}} = 2^3 = 8$. Для решения применили первое свойство: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

4. Вычислить: $9^{\frac{2}{3}} \div 9^{\frac{1}{6}}$.

Решение: для решения применяем второе свойство: $a^r \div a^s = a^{r-s}$. Получим:

$9^{\frac{2}{3}} \div 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 9^{\frac{4-1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

5. Вычислить: $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$.

Решение: для решения применяем третье свойство $\left(a^{r}\right)^{s} = a^{rs}$. Следовательно: $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$=$8^{\frac{-4}{12}} = 8^{\frac{-4}{12}} = 8^{\frac{-1}{3}} = (2^3)^{\frac{-1}{3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

6. Сравнить выражения $\left(\frac{4}{5}\right)^{17}$ и $\left(\frac{8}{9}\right)^{17}$.

Решение: применяя свойство степеней 6-7, если m и n – целые числа, причем $m>n$, то при $0<a<1$ справедливо неравенство $a^m<a^n$, а при $a>1$ выполняется неравенство $a^m>a^n$. Следовательно ,

сравним выражения $\left(\frac{4}{5}\right)^{17} < \left(\frac{8}{9}\right)^{17}$

7. Найдите значение выражения: $\left(\frac{1}{4}\right)^{3a} \div (4^{-5a})$ при а=0,5

Так, как $\frac{1}{4}$=$\frac{1}{4}^{1}$= 4^{-1}, то

$$(4^{-1})^{3a}:4^{-5a}=4^{-3a}:4^{-5a}=4^{-3a-(-5a)}= 4^{-3a+5a}=4^{2a}, \text{ при } a=0{,}5$$

$$4^{2\cdot 0{,}5}=4^{1}=4.$$

Проверь себя:

1) Представить в виде степени с рациональным показателем $\sqrt[3]{x^5}$ =________

2) Представить в виде корня из степени с целым показателем $x^{\frac{-5}{6}}$ = ________

3) Вычислить:

$5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$ =____

4) Вычислить:

$4^{\frac{1}{3}} \div 4^{\frac{5}{6}}$=____

5) Вычислить: $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$=____

6) Вычислить: $7^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{\frac{2}{3}}$=______________________________________

7) Сравнить выражения: 2^{100} … 10^{30}

8) Вычислить: $(2a^2)^5$ =____

Ответы:

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)
$x^{\frac{5}{3}}$	$\sqrt[6]{x^{-5}}$	5	0,5	$\frac{2}{3}$	49	>	$32a^{10}$

Сделай сам:

1. Представить в виде степени с рациональным показателем

а) $\sqrt[5]{1{,}3^4}$=_______________________________________

б) $\sqrt[6]{0{,}4^5}$=_______________________________________

2. Представить в виде корня из степени с целым показателем

а) $2^{1,2}$=____

б) $4^{-0,6}$=____

в) $5^{\frac{-4}{3}}$=____

3. Найдите значение выражения:

а) $5^{3в}$ при в=0,25

Решение:

____

____

Ответ: ____________

б) $(16^{-3})^{\frac{а}{6}}$ при а=-0,5

Решение:

____

____

Ответ: ___________

в) $\frac{6^{-3а}}{6^{-5а}}$ при а $=\frac{1}{2}$

Решение:

____

____

Ответ: ___________

4. Вычислить:

а) $\frac{6^{0,7}}{6^{0,3}}=$____

б) $а^{\frac{7}{6}} \div а^{\frac{-5}{6}} =$____

в) $с^{-5,3} \cdot с^{0,1}=$____

5. Сравните числа:

а) 3^{24}___ 8^{7}

б) $\sqrt[5]{7^4}$ ___ $7^{\frac{3}{5}}$

в) $\sqrt[6]{12^7}$ ___ $12^{\frac{7}{5}}$

6. Найдите значение выражения:

а) $8^{\frac{2}{3}} \div 4^{\frac{-1}{2}} + 3^0$

Решение:

____

____

Ответ: ___________

б) $10^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{-6}{5}} \cdot 5^{\frac{4}{5}} - 2^0$

Решение:

____

____

____

Ответ: ___________

в) $9^{\frac{-3}{2}} \cdot 27^{\frac{4}{3}} - 5^0$

Решение:

____
____
____

Ответ: ___________

г) $\frac{6^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{-5}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}} + 6^0$

Решение:

____
____
____

Ответ: ___________

7. Вычислить:

а) $0{,}2^6 \cdot 5^6$

Решение:
____
____

Ответ: ___________

б) $0{,}25^2 \cdot 40^2$

Решение:
____
____

Ответ: ___________

8. Заполните пропуски так, чтобы получилось верное равенство

$x\text{-}2x^{\frac{1}{2}}=\ldots..(x^{\frac{1}{2}}\text{-} \ldots.)$

$a\text{-}b=(\ldots. - \ldots)(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$

9. Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

а) $c^{\frac{3}{4}}$=____

б) $0{,}2^{0,5}$=____

в) $\sqrt{1{,}3}$=____

г) $\sqrt[5]{c^4}$=____

д) $\frac{a^5 \cdot a^{-8}}{a^{-2}}$ при а=6

Решение: ____

____

№10. $\frac{6^{-4} \cdot 6^{-9}}{6^{-12}}$

Решение:

____

____

_

№11.Вычислить:

а) $c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{3}}$=______________________________

б) $x^{\frac{1}{2}}: x^{\frac{3}{2}}$=______________________________

в) $\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$=______________________________

г) $x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{x}$=______________________________

д) $10^{\frac{2}{5}} \cdot 10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{0,1}$=______________________________

е) $4^{0,6} \cdot 2^{0,2}: 2^{-0,6}$=______________________________

ж) $(27 \cdot 64)^{\frac{1}{3}}$=______________________________

№ 12. Решить:

а) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{15}$

б) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{125} - \sqrt[3]{216}$

в) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} \cdot 64^{-\frac{1}{2}}$

г) $\left(3^{-\frac{3}{4}} \cdot 8\right)^{\frac{4}{3}}$

д) $4^{-\frac{3}{2}} + 4^{0} + 4^{\frac{3}{2}}$

е) $8^{-0,5}: 32^{1,5}$

Решение:

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Занятие № 6

Тема «Степень и ее свойства»

Вопросы:

1. Дайте определение степени с дробным показателем.

Ответ:____

2. Для какого дробного показателя определена степень с основанием равным нулю?

Ответ:____

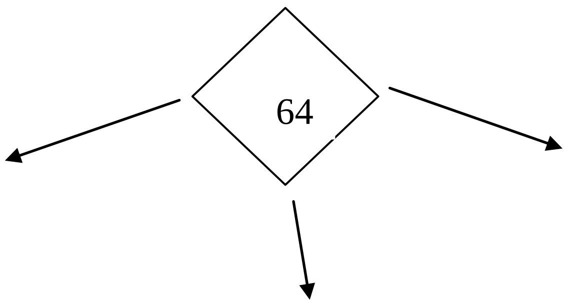
3. Определяется ли степень с дробным показателем для отрицательного основания?

Ответ:____

Задания

1. Представьте число 64 в виде степени с основанием -2; 2; 8.

Ответ:



2. Куб, какого числа равен 64?

Ответ:____

3. Представьте число 64 в виде степени с рациональным показателем.

Ответ:____

4. Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

$2^{\frac{2}{3}} =$ $\quad -8^{1,5} =$ $\quad (x-y)^{\frac{2}{3}} =$ $\quad 3^{-\frac{1}{3}} =$ $\quad 5a^{\frac{1}{2}} =$

5. Представьте в виде степени с дробным показателем:

$\sqrt{7} =$ $\quad \frac{3}{\sqrt{2}} =$ $\quad \sqrt{(x+y)^3} =$ $\quad b\sqrt{b} =$ $\quad \sqrt[9]{a^4} =$

6. Упростите выражения и вычислите их значения, применяя свойства степени:

$\frac{14^4}{2^6 \cdot 49^2} =$ $\quad 25^{\frac{3}{2}} \cdot 0{,}001^{\frac{1}{3}} =$ $\quad \frac{2 \cdot 3^{20} - 5 \cdot 3^{19}}{9^9} =$

Решение:

____

7. Применяя свойства степеней, сравните выражения:

$\left(\frac{4}{5}\right)^{17}$ K $\left(\frac{8}{9}\right)^{17}$ $\quad$ 3^{21} K 8^{7} $\quad$ 2^{100} K 10^{30}

8. Сократите дробь:

$\frac{x+2x^{0,5}}{x^{1,5}+2x}=$ $\quad$ $\frac{a^{-\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{3}{5}}}=$

Решение:

Занятие № 7
Тема «Логарифмы и их свойства»

В помощь студенту:

Логарифм переводится с греческого, как *отношение чисел.* Изобретение логарифмов обусловлено тем, что в течении XVI в. резко возрос объем работы, связанный с проведением приближенных вычислений в ходе решения разных задач, и в первую очередь задач астрономии, имеющее непосредственное практическое применение (в частности, при определении положения судов по звездам и по Солнцу).

Опр: Логарифмом числа **b** по основанию **a** называют показатель степени, в которую нужно возвести основание **a**, чтобы получить число **b**.

$\boxed{a^x = b \text{ то } \log_a b = x}$

Пример:

$\log_2 8 = 3$ т.к. $2^3 = 8$

$\log_2 32 = 5$ т.к. $2^5 = 32$

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$

Пример:

$2^{\log_2 3} = 3$

Свойства:

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$
4. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
5. $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$
6. $\log_{a^q} b = \dfrac{1}{q} \cdot \log_a b$

Формула перехода к новому основанию:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Пример:

$$\log_7 125 = \frac{\log_5 125}{\log_5 7} = \frac{3}{\log_5 7}.$$

Примеры:

1. Найти значение выражения $\log_4 32$

Решение:

Представим основание и число, находящиеся под логарифмом, в виде степени 2, получим:

$$\log_{2^2} 2^5$$

Выносим степени из-под знака логарифма, как коэффициент, согласно формулам $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$ и $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$, имеем

$\log_4 32 = \log_{2^2} 2^5 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \log_2 2$

Учитывая, что $\log_a a = 1$, получим:

$\log_4 32 = \log_{2^2} 2^5 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \log_2 2 = \frac{5}{2} \log_2 2 = \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}$

Ответ: $\log_4 32 = \frac{5}{2}$

2. Найти значение выражения $\log_{12} 3 + \log_{12} 4$

Решение:

По свойству логарифма: сумма логарифмов равна логарифму произведения $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$, поэтому данное выражение перепишется в виде:

$$\log_{12} 3 + \log_{12} 4 = \log_{12}(4 \cdot 3) = \log_{12} 12 = 1$$

Учитывая, что $\log_a a = 1$

Ответ: $\log_{12} 3 + \log_{12} 4 = 1$

3. Вычислить значение выражения $\frac{1}{\log_{12} 18} + \frac{1}{\log_{27} 18}$

Перейдем в каждом из слагаемых к логарифму по основанию 18, используя формулу перехода:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\frac{1}{\log_{12} 18} + \frac{1}{\log_{27} 18} =$$
$$= \log_{18} 12 + \log_{18} 27$$
$$= \log_{18}(12 \cdot 27) = \log_{18} 324 = \log_{18} 18^2 = 2\log_{18} 18 = 2$$

Проверь себя:

1) $\log_5 1 =$____
2) $\log_{0,5} \frac{1}{2} =$____
3) $\log_6 12 + \log_6 3 =$___________________________________
4) $\log_3 6 - \log_3 2 =$___________________________________
5) $\log_5 5^8 =$____
6) $\frac{lg81}{lg3} =$____

Ответы:

1)	2)	3)	4)	5)	6)
0	1	2	1	8	4

Сделай сам:

1. Вычислите:

а) lg16+lg625

Решение:
____
____

Ответ: ___________

б) $\log_{0.3} 27 - 3\log_{0.3} 10$
Решение:
____
____

Ответ: ___________

2. Упростите:

а) $\log_5 \frac{1}{25}$
Решение:
____
____

Ответ: ___________

б) lg1000
Решение:
____
____

Ответ: ___________

в) $19^{\log_{19} 13}$
Решение:
____
____

Ответ: ___________

г) $0.2^{3\log_{0.2} 1}$
Решение:
____
____

Ответ: ___________

д) $6^{2+\log_6 4}$
Решение:
____
____

Ответ: ___________

3. Вычислить:

а) $\log_2 2^4$
б) $\log_3 \frac{1}{27}$
в) $\log_{\sqrt{7}} 49$

г) $\log_{\sqrt{2}} 1$
д) $3^{\log_3 8}$
е) $2^{3+\log_2 9}$
ж) $8^{2\log_8 3}$
з) $\log_6 12 + \log_6 3$
и) $\log_{144} 3 + \log_{144} 4$
к) $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{9}$

Решение:

4. Вычислить:
а) $\log_2 18 + \log_2 3 - \log_2 27$
б) $\log_2 \sqrt{3} + \frac{1}{2}\log_2 \frac{4}{3}$
в) $\log_3 8 + 3\log_3 \frac{9}{2}$
г) $\log_6 14 + \log_6 3 - \log_6 7$

Решение:

Занятие № 8
Тема «Логарифмы и их свойства»

1. Дайте определение логарифма? Записать определение логарифма на математическом языке.

Ответ:____

____

____

2. Соедините формулы:

$\log_a 1$	$\log_c(ab)$
$\log_a a$	b
$\log_c a + \log_c b$	$n\log_a b$
$\log_c a - \log_c b$	0
$a^{\log_a b}$	1
$\log_a b^n$	$\log_c(a/b)$

3. Вычислить и поставить в соответствии ответы:

$\lg 2 + \lg 5$	5
$\log_7 7 - \log_7 49$	-4
$\log_2(1/16)$	-1
$\log_4 64 + \log_3 9$	1

4. Найдите ошибки:

1) $\log_5 25 = 5, \quad$ так как $5 \cdot 5 = 25$

2) $\log_4(1/16) = 2,$ так как $4^2 = 1/16$

3) $\log_{81} 9 = 9, \quad$ так как $81 = 9 \cdot 9$

4) $0{,}3^{2\log_{0,3}6} = 0{,}3^{\log_{0,3}6 \cdot 2} = 0{,}3^{\log_{0,3}12} = 12$

5) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2 = \log_{10}(5+2) = \log_{10} 7$

6) $\log_{1/3} 54 - \log_{1/3} 2 = \log_{1/3}(54-2) = \log_{1/3} 52$

5. Вычислить:

1) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-7}$
2) $\log_{0,1} 0{,}001$
3) $\log_{\sqrt{2}}(2\sqrt{8})$
4) $4^{\log_4 23}$
5) $7^{1+\log_7 4}$
6) $lg25 + lg4$
7) $\log_2 \log_5 25$
8) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36$
9) $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{9}$

10) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{64}{729}$

Решение:

РАЗДЕЛ. ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Занятие № 9.

Тема «Радианная мера угла. Тригонометрические функции числового аргумента»

В помощь студенту:

Тригонометрия — древнейшая наука, первые тригонометрические элементы были письменно изложены греческим астрономом Гиппархом в середине 2 века до н. э. Наивысшими достижениями греческая тригонометрия обязана астроному Птолемею. Значительной высоты достигла тригонометрия и у индийских средневековых астрономов. Дальнейшее развитие тригонометрия получила в 9-14 веках в трудах арабо-язычных ораторов. В руках знаменитого мусульманского ученого Насир эд-Дин тригонометрия становится самостоятельной научной дисциплиной. Буквенные обозначения утвердились лишь в середине 18 века благодаря русскому академику Эйлеру. Этот ученый придал всей тригонометрии её современный вид.

Тригонометрия (в переводе с греческого) измерение треугольников.

Длительное время тригонометрия развивалась как часть геометрии, все факты формулировались и доказывались с помощью геометрических понятий и утверждений. Наибольшие стимулы к развитию тригонометрии возникали в связи с решением задач астрономии, что представляло большой практический интерес (например, для решения задач определения местонахождения судна, предсказания затмений и т.д.) И сейчас в наше время тригонометрия широко используются в естествознании и других науках.

Радиан – это величина центрального угла круга, опирающегося на дугу, длина которой равна радиусу этого круга.

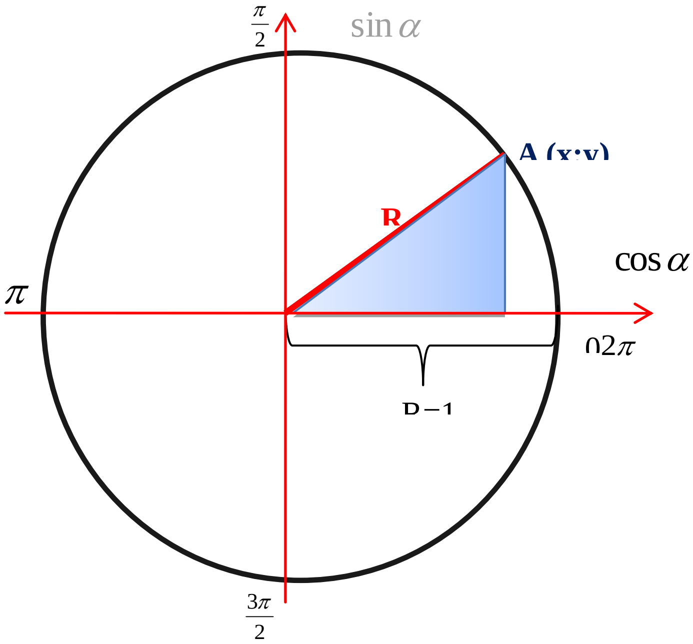
$\frac{\pi n}{180}$ – формула для вычисления радианной меры.

$\frac{180n}{\pi}$ – формула для вычисления градусной меры

α	**0^0**	**30^0**	**45^0**	**60^0**	**90^0**	**180^0**	**270^0**	**360^0**
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctgα	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

$-1 \le \sin\alpha \le 1$,

$-1 \le \cos\alpha \le 1$

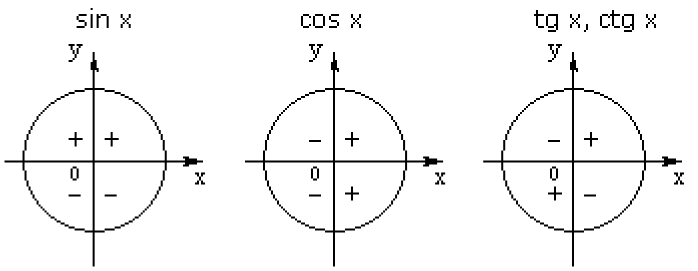


$\cos\alpha = x$

$\sin\alpha = y$

$tg\alpha = \frac{y}{x}$,

$ctg\alpha = \frac{x}{y}$



Задания

1. Определите, в какой координатной четверти находится аргумент тригонометрической функции:

1) sin $8\pi/9$=______
2) tg $12\pi/15$=______
3) cos $9\pi/10$=______
4) ctg $5\pi/3$=______

2. Переведите из радианной меры в градусную:

а) $\frac{\pi}{2}$=______
б) π=______
в) $\frac{3\pi}{2}$=______
г) 2π=______
д) 7π=______
е) $-\frac{\pi}{2}$=______
ж) $\frac{4\pi}{3}$=______

3. Переведите из градусной меры в радианную:

а) 120^0=______
б) 220^0=______
в) 300^0=______
г) 210^0=______

д) 90^0=_____

4. Используя табличные значения тригонометрических функций, найдите числовые значения выражений:

а) $\cos 0^0 \sin 90^0 - \dfrac{2\cos 180^0}{\cos^2 0^0}$ =____

б) 3 cos 0° + 4 sin 90° + 5 tg 180°=____

в) 4 sin 0° - 5 cos 180° - ctg 90°=____

г) 4 sin 30° + 5 tg 45° - 2 cos 60° =_______________________________________

д) 2 cos 30° - 4 sin 90° + 6 ctg 30°=_______________________________________

Домашняя работа

1. Переведите из радианной меры в градусную:

а) $\frac{\pi}{6}$=_____

б) 3π=_____

в) $\frac{4\pi}{7}$=_____

г) 4π=_____

д) 5π=_____

е) $-\frac{\pi}{8}$=_____

ж) $\frac{7\pi}{10}$=_____

2. Переведите из градусной меры в радианную:

а) 10^0=_____

б) 210^0=_____

в) 200^0=_____

г) 250^0=_____

д) 290^0=_____

Занятие № 10
Тема «Тригонометрические формулы»

В помощь студенту:

α	**0^0**	**30^0**	**45^0**	**60^0**	**90^0**	**180^0**	**270^0**	**360^0**
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctgα	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

$-1 \le \sin\alpha \le 1$, $-1 \le \cos\alpha \le 1$

Основные формулы тригонометрии

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Формулы сложения:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mu \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\mathrm{tg}\,(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta};$$

$$\mathrm{ctg}\,(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta}.$$

Формулы суммы и разности синусов и косинусов:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

или $\cos\alpha - \cos\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta-\alpha}{2}$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Преобразование суммы в произведение

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2},$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2},$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

Формулы приведения

Функция	Аргумент t						
	$\frac{\pi}{2}-a$	$\frac{\pi}{2}+a$	$\pi-a$	$\pi+a$	$\frac{3\pi}{2}-a$	$\frac{3\pi}{2}+a$	$2\pi-a$
sin t	cos a	cos a	sin a	- sin a	- cos a	- cos a	- sin a
cos t	sin a	- sin a	- cos a	- cos a	- sin a	sin a	cos a
tg t	ctg a	- ctg a	-tga	tg a	ctg a	- ctg a	-tga
ctg t	tga	- tga	- ctga	ctg a	tg a	-tga	- ctg a

Для облегчения запоминания формул приведения рекомендуем следующее правило:

1) в правой части формулы ставится тот знак, который имела бы левая часть при условии $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
2) если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi n}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi n}{2} \pm \alpha$, то синус заменяется на косинус, тангенс на котангенс и наоборот; если же угол равен $\pi \pm a$ или $2\pi - a$, то замены не происходит.

Вопросы:

1. На основе единичной окружности дайте определения тригонометрических функций числового аргумента

Ответ:

____

____

____

____

2. Сформулируйте теорему Пифагора

Ответ:

____

____

____

Задания:

1. Представить 105^0 как сумму 60^0+45^0, вычислите:

а) $\sin 105^0$=____

____

б) $\cos 105^0$=____

____

2. Упростить:

а) sin(α+β)-sin αcosβ=____

____

б) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$=____

____

3. Упростить:

sin5xcos3x+cos5xsin3x=____

____

4. Найти значение выражения:

а) $\cos 107^0 \cos 17^0 + \sin 107^0 \sin 17^0$=____

____

б) $\cos\frac{5\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8} + \sin\ \frac{5\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}$=____

в) $\frac{tg25+tg20}{1-tg25tg20}$=____

5. Упростить:

а) $\frac{\sin 2t}{\cos t} - \sin t$=____

б) $\frac{\sin 100}{2\cos 50}$=____

в) $2\sin 15^0 \cos 15^0$=____

г) $\cos^2 15-\sin^2 15$=____

д) $\sin 40+\sin 16$=____

е) $\cos 15+\cos 45$=____

ж) $\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{7}$=____

6. Представьте в виде произведения:

$\sin 3t-\sin t$=____

7. Преобразуйте произведение в сумму:

$\sin 23\sin 32$=____

8. Вычислить значение выражений:

$tg45^0\ \sin 60^0\ ctg30^0$=____

Занятие № 11
Тема «Тригонометрические формулы»

В помощь студенту:

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctgα	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

$-1 \le \sin\alpha \le 1$, $-1 \le \cos\alpha \le 1$

<u>Основные формулы тригонометрии</u>

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Формулы сложения:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \ \mu \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Формулы суммы и разности синусов и косинусов:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Формулы преобразования произведения в сумму в тригонометрических функций

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$

Формулы приведения

Функция	Аргумент t						
	$\frac{\pi}{2}-a$	$\frac{\pi}{2}+a$	$\pi-a$	$\pi+a$	$\frac{3\pi}{2}-a$	$\frac{3\pi}{2}+a$	$2\pi-a$
sin t	cos a	cos a	sin a	- sin a	- cos a	- cos a	- sin a
cos t	sin a	- sin a	- cos a	- cos a	- sin a	sin a	cos a
tg t	ctg a	- ctg a	-tga	tg a	ctg a	- ctg a	-tga
ctg t	tga	- tga	- ctga	ctg a	tg a	-tga	- ctg a

Для облегчения запоминания формул приведения рекомендуем следующее правило:

1) в правой части формулы ставится тот знак, который имела бы левая часть при условии $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

2) если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi n}{2}\pm\alpha$ или $\frac{3\pi n}{2}\pm\alpha$, то синус заменяется на косинус, тангенс на котангенс и наоборот; если же угол равен $\pi\pm a$ или $2\pi-a$, то замены не происходит.

1. Закончи равенство

а) $\sin^2 25^0+\cos^2 25^0=\ldots$

б) $\frac{\sin 30^0}{\cos 30^0}=\ldots$

в) $tg33^0\cdot ctg33^0=....$

г) $\cos 33^0\cos 27^0-\sin 33^0\sin 27^0=....$

д) $\cos 60^0-\cos 30^0=....$

е) $2\sin 40^0\cos 40^0=....$

ж) $\cos^2 50^0-\sin^2 50^0=\ldots$

з) $tg2\alpha=\ldots$

и) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\ldots$

к) $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\ldots$

2.Найди ошибку

а) $\sin^2 30^0 + \cos^2 70^0 = 1$

б) $\dfrac{\cos 60^0}{\sin 30^0} = ctg\, 20^0$

в) $tg\, 60^0 \cdot ctg\, \dfrac{1}{60^0} = 1$

г) $\sin 20^0 \cos 10^0 - \cos 20^0 \sin 10^0 = \sin 30^0$

д) $\sin 20^0 \cos 10^0 + \cos 20^0 \sin 10^0 = \cos 30^0$

е) $\sin 60^0 - \sin 30^0 = 2\sin 15^0 \sin 90^0$

3.Заполните пропуски, чтобы равенство было верным:

$\cos 10^0 = \cos(90^0 - 80^0) = \sin ....$

$\sin 80^0 = \cos ....$

4.Вычислите значения: *

а) $\sin 75^0$=____

б) $\cos 15^0$=____

в) $tg 15^0$=____

5.Вычислить:

$\cos 126^0 \cos 36^0 + \sin 126^0 \sin 36^0$ =____

6.Вычислите:

а) $\cos 48^0 - \cos 12^0$=____

б) $\sin 70^0 + \sin 50^0$=____

5.Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos 68^0 - \cos 22^0}{\sin 68^0 - \sin 22^0}$=____

б) $\sin 43^0 \cos 19^0$ =____

*Воспользуйтесь тем, что $75^0=45^0+30^0$, $15^0=45^0-30^0$

Занятия № 12
Тема «Тождественные преобразования»

В помощь студенту:

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctgα	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

$-1 \le \sin\alpha \le 1$, $-1 \le \cos\alpha \le 1$

Основные формулы тригонометрии

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Формулы сложения:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \, \mu \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Формулы суммы и разности синусов и косинусов:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Формулы приведения

Функция	Аргумент t						
	$\frac{\pi}{2}-a$	$\frac{\pi}{2}+a$	$\pi-a$	$\pi+a$	$\frac{3\pi}{2}-a$	$\frac{3\pi}{2}+a$	$2\pi-a$
sin t	cos a	cos a	sin a	- sin a	- cos a	- cos a	- sin a
cos t	sin a	- sin a	- cos a	- cos a	- sin a	sin a	cos a
tg t	ctg a	- ctg a	-tga	tg a	ctg a	- ctg a	-tga
ctg t	tga	- tga	- ctga	ctg a	tg a	-tga	- ctg a

Для облегчения запоминания формул приведения рекомендуем следующее правило:

1) в правой части формулы ставится тот знак, который имела бы левая часть при условии $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$
2) если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi n}{2}\pm\alpha$ или $\frac{3\pi n}{2}\pm\alpha$, то синус заменяется на косинус, тангенс на котангенс и наоборот; если же угол равен $\pi\pm a$ или $2\pi-a$, то замены не происходит.

1.Упростите выражение:

$\sin^2 17^0+\cos^2 17^0=$____

$(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)=$____

$1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=$____

2.Сократите дробь:

$\frac{ctg\,\alpha}{\cos\alpha}=$____

$\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=$____

$\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}=$____

$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}=$____

$\frac{\cos 2\alpha}{1-2\sin\alpha}=$____

3.Вычислите:

$2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=$____

4.Упростите выражение:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$____

$\cos(\pi-\alpha)=$____

$tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$=____

$ctg(2\pi-\alpha)$=____

5. Вычислить cost и sint, если $t=\frac{45\pi}{4}, t=-\frac{37\pi}{3}, t=45\pi, t=-18\pi,$

а) cost = cos$\frac{45\pi}{4}$=____

б) sint = sin$\frac{45\pi}{4}$=____

в) cos t = cos…=____

г) sint = sin…=____

д) cost = cos…=____

е) sint = sin…=____

ж) cost = cos…=____

з) sint = sin…=____

6. Вычислить: cos75^0=____

7. Вычислить: sin(π+x) =____

8. Вычислить: cos(π+x) =____

9. Вычислить sinx и cosx, если x=255^0

sinx= sin255=sin(….+…..)=____

cosx= cos…=____

10. Упростить sin ($\frac{\pi}{4}+$ x)+cos($\frac{\pi}{4}$+x)=______________________________

11. Вычислить: cos37^0 cos8^0-sin37^0 sin8^0=____

12. Вычислить: sin48^0 cos12^0+cos48^0 sin12^0=_____________________________________

13. Вычислить: cos($\frac{\pi}{4}$ - y)=____

14. Вычислить: sin44^0 cos14^0-sin14^0 cos44^0=_____________________________________

15. Вычислить: $\frac{tg27+tg18}{1-tg27tg18}$=____

16. Вычислить: $\cos^2\frac{\pi}{8}$-$\sin^2\frac{\pi}{8}$=____

17. Вычислить: sin6x+sin4x=____

18. Вычислить: cos $\frac{\pi}{8}$ + cos $\frac{3\pi}{8}$=____

Занятия № 13

Тема «Тождественные преобразования»

В помощь студенту:

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctgα	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

$-1\le\sin\alpha\le1$, $-1\le\cos\alpha\le1$

<u>Основные формулы тригонометрии</u>

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Формулы сложения:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Формулы суммы и разности синусов и косинусов:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

Формулы приведения

Функция	Аргумент t						
	$\frac{\pi}{2}-a$	$\frac{\pi}{2}+a$	$\pi-a$	$\pi+a$	$\frac{3\pi}{2}-a$	$\frac{3\pi}{2}+a$	$2\pi-a$
sin t	cos a	cos a	sin a	- sin a	- cos a	- cos a	- sin a
cos t	sin a	- sin a	- cos a	- cos a	- sin a	sin a	cos a
tg t	ctg a	- ctg a	-tga	tg a	ctg a	- ctg a	-tga
ctg t	tga	- tga	- ctga	ctg a	tg a	-tga	- ctg a

Задания:

1. Упростите выражение:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$; в) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)$;

б) $\cos(2\pi-t)$; г) $\sin(\pi+t)$.

2. Упростите выражение:

а) $\sin(\pi-t)$; в) $\cos(2\pi+t)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$; г) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)$.

3. Упростите выражение:

а) $\cos(90^\circ-\alpha)$; в) $\sin(270^\circ-\alpha)$;

б) $\sin(360^\circ-\alpha)$; г) $\cos(180^\circ-\alpha)$.

4. Упростите выражение:

а) $\sin(90^\circ-\alpha)+\cos(180^\circ+\alpha)+\mathrm{tg}(270^\circ+\alpha)+\mathrm{ctg}(360^\circ+\alpha)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)-\cos(\pi-t)+\mathrm{tg}(\pi-t)+\mathrm{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}-t\right)$.

5. Упростите выражение:

а) $\frac{\cos(180^\circ+\alpha)\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)\sin(90^\circ+\alpha)}$; в) $\frac{\sin(-\alpha)\,\mathrm{ctg}(-\alpha)}{\cos(360^\circ-\alpha)\,\mathrm{tg}(180^\circ+\alpha)}$;

б) $\frac{\sin(\pi-t)\cos(2\pi-t)}{\mathrm{tg}(\pi-t)\cos(\pi-t)}$; г) $\frac{\sin(\pi+t)\sin(2\pi+t)}{\mathrm{tg}(\pi+t)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)}$.

РАЗДЕЛ. ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ.

Занятие № 14

Тема «Числовая функция, ее свойства и графики»

В помощь студенту:

Опр: Числовой функцией с областью определения D называется соответствие, при котором каждому числу **x** из множества **D** сопоставляется по некоторому правилу число **y**, зависящее от **x**.

Свойства функции:

Опр: Функция f(x) называется четной, если для любого **x**из ее области определения **f(-x)=f(x)**

Пример: $y = x^2$

Опр: Функция f(x) называется нечетной, если для любого **x**из ее области определения **f(-x)=-f(x)**

Пример: $y = x^3$

Опр: Функцию f(x) называют *периодической* с периодом $T \neq 0$, если для любого **x**из области определения значения этой функции в точке **x, x-T**и**x+T**равны, т.е. f(x+T)=f(x)=f(x-T)

Опр: Функция f(x) *возрастает* на множестве **P**, если для любых x_1 и x_2 из множества **P**, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $P(x_2) > P(x_1)$.

Опр: Функция f(x) *убывает* на множестве **P**, если для любых x_1 и x_2 из множества **P**, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $P(x_2) < P(x_1)$.

Опр: Графиком функции f(x) называют множеством всех точек (x;y) координатной плоскости, где y=f(x).

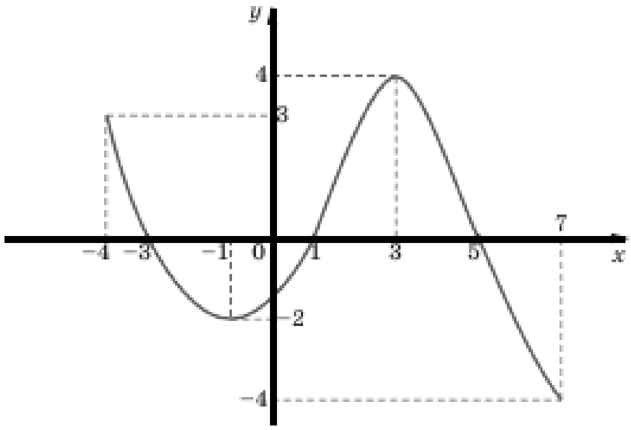
*Опр:*Функцию, принимающую каждое свое значение в единственной области определения, называют обратимой.

Свойства обратной функции:

Опр: Если функция g(x) в каждой точке x из ее области значений обратимой функции f принимает такое значение y, что f(y)=x, то говорят, что функция g – обратная функция к f.

Задания:

1. Найти D (y) и E (y) функции, изображенной на графике



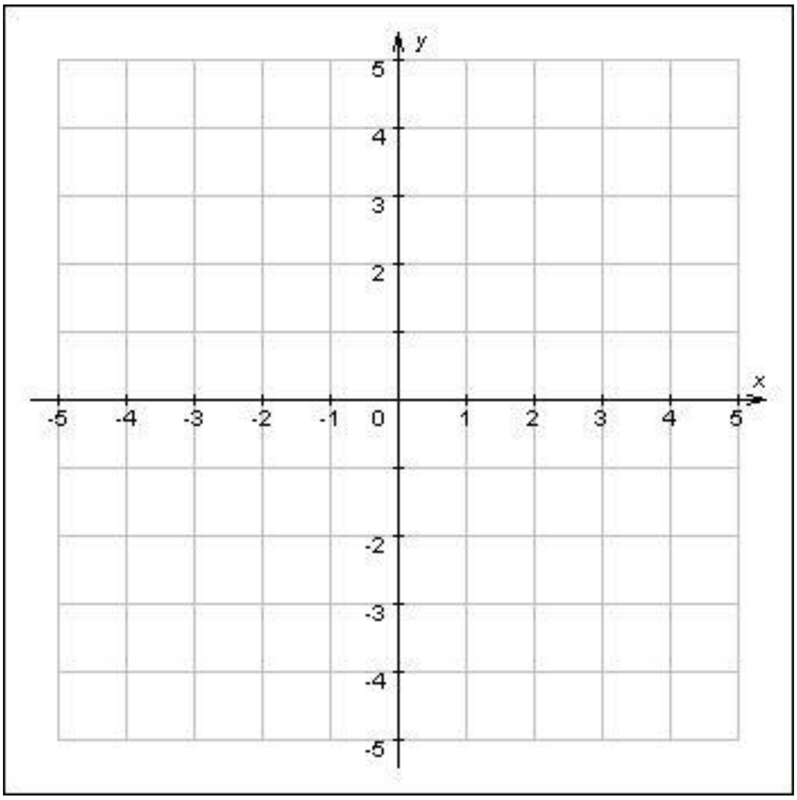
Решение: ____

____

2. Начертите график функции f , для которой

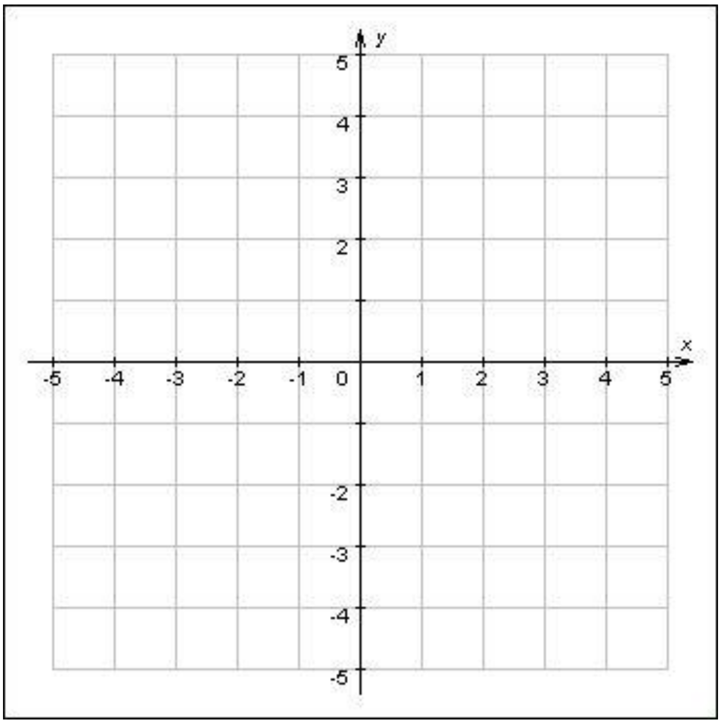
а) D(f)=[-2;4], E(f)=[-3;3]

Решение:

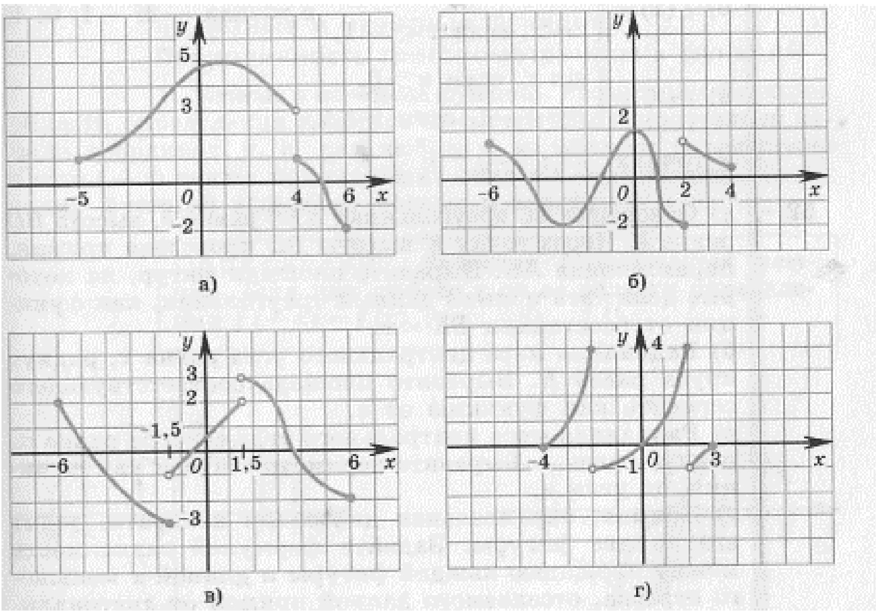


б) D(f)=[-5;3), E(f)=[2;6]

Решение:



3. Найдите область определения и область значений функции, график которой изображен на рисунке, а-г



Решение:

4. Докажите, что функции являются четными

а) $f(x)=3x^2-4x$

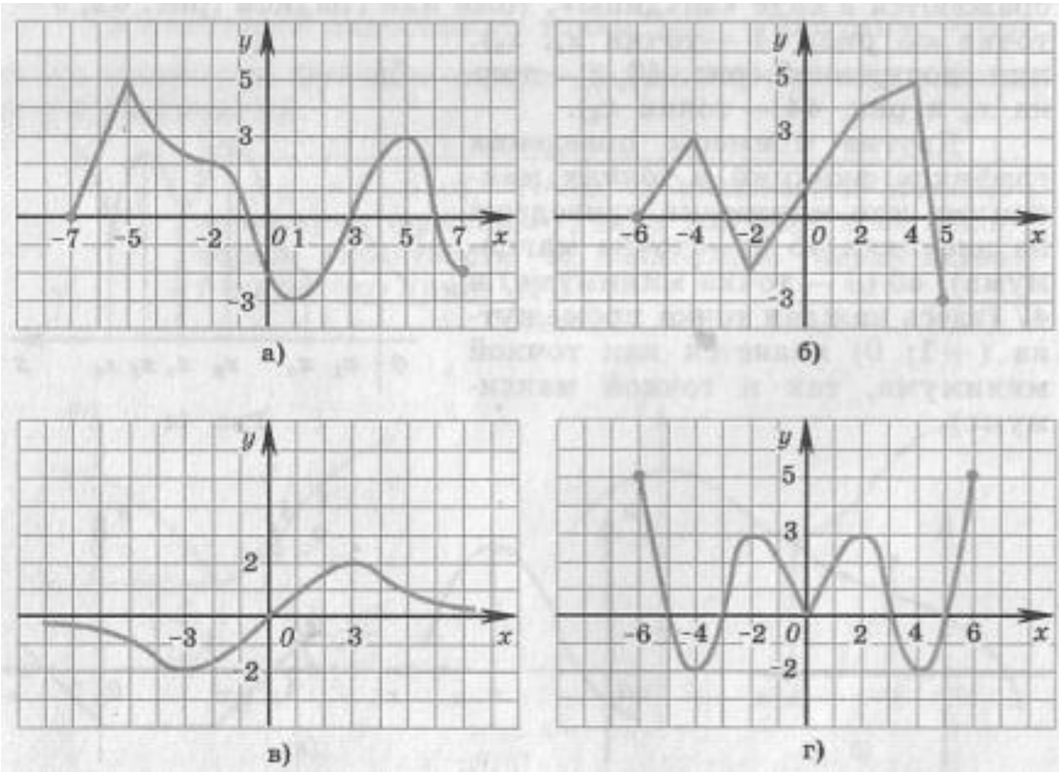
Решение:____

б) $f(x)=4x^6-x$

Решение:____

5.Для функций, графики которых изображены на рисунке а-г, найдите:

а) Промежутки возрастания и убывания функции
б) Экстремумы функции и наибольшее - наименьшее значение функции



Решение:____

6. Найдите область определения функции y=f(x)

а) f(x)=$\frac{x}{x^2+4}$

б) f(x)=$\frac{2}{x^2-4}$

в) f(x)=$\sqrt{2-x}$

Решение:

Занятие № 15

Тема «Числовая функция, ее свойства и графики»

В помощь студенту:

Опр: Числовой функцией с областью определения D называется соответствие, при котором каждому числу **x** из множества **D** сопоставляется по некоторому правилу число **y**, зависящее от **x**.

Свойства функции:

Опр: Функция f(x) называется четной, если для любого **x** из ее области определения **f(-x)=f(x)**

Пример: $y = x^2$

Опр: Функция f(x) называется нечетной, если для любого **x** из ее области определения **f(-x)=-f(x)**

Пример: $y = x^3$

Опр: Функцию f(x) называют *периодической* с периодом $T \neq 0$, если для любого **x**из области определения значения этой функции в точке **x, x-T**и**x+T**равны, т.е. f(x+T)=f(x)=f(x-T)

Опр: Функция f(x) *возрастает* на множестве **P**, если для любых x_1 и x_2 из множества **P**, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $P(x_2) > P(x_1)$.

Опр: Функция f(x) *убывает* на множестве **P**, если для любых x_1 и x_2 из множества **P**, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $P(x_2) < P(x_1)$.

Опр: Графиком функции f(x) называют множеством всех точек (x;y) координатной плоскости, где y=f(x).

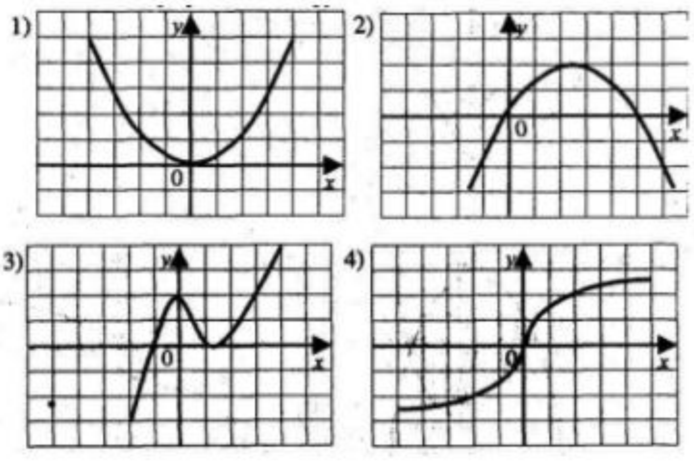
Опр: Функцию, принимающую каждое свое значение в единственной области определения, называют обратимой.

Свойства обратной функции:

Опр: Если функция g(x) в каждой точке x из ее области значений обратимой функции f принимает такое значение y, что f(y)=x, то говорят, что функция g – обратная функция к f.

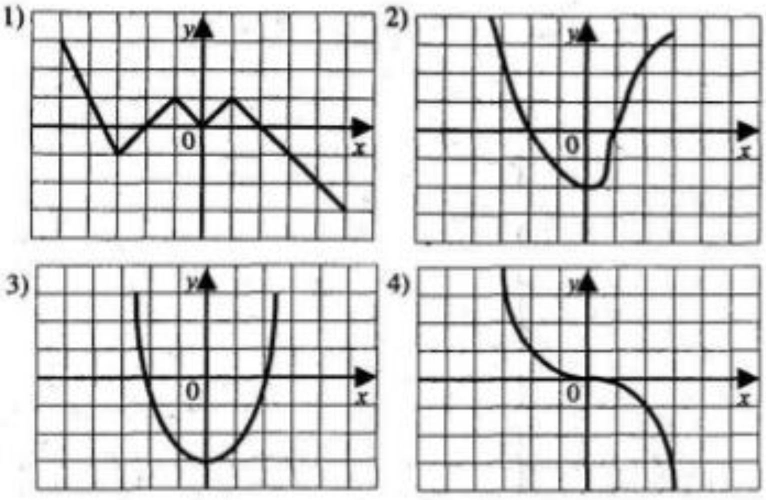
Задания.

1) Укажите рисунок, на котором изображён график чётной функции.



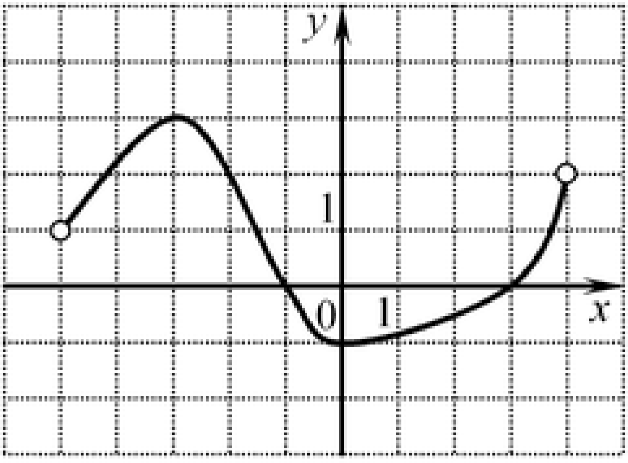
Решение:____

2) Укажите рисунок, на котором изображён график нечётной функции.



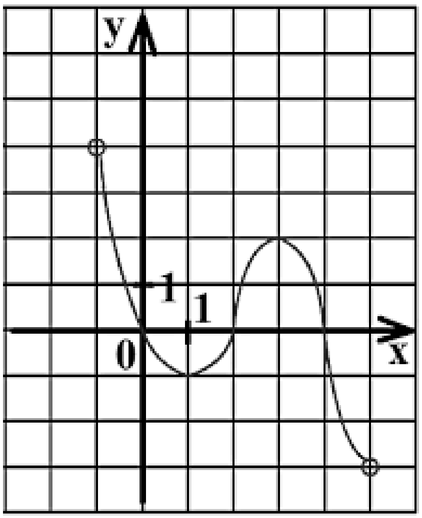
Решение:____

3) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



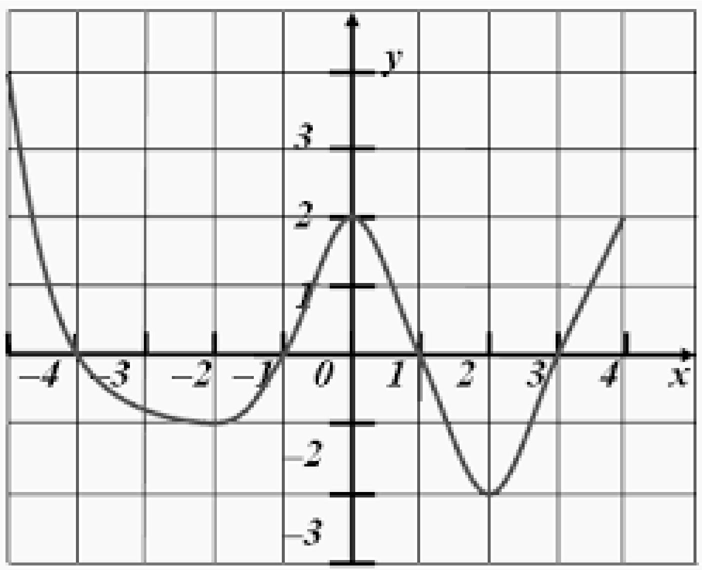
Решение:____

4) Функция задана графиком. Укажите множество значений этой функции.



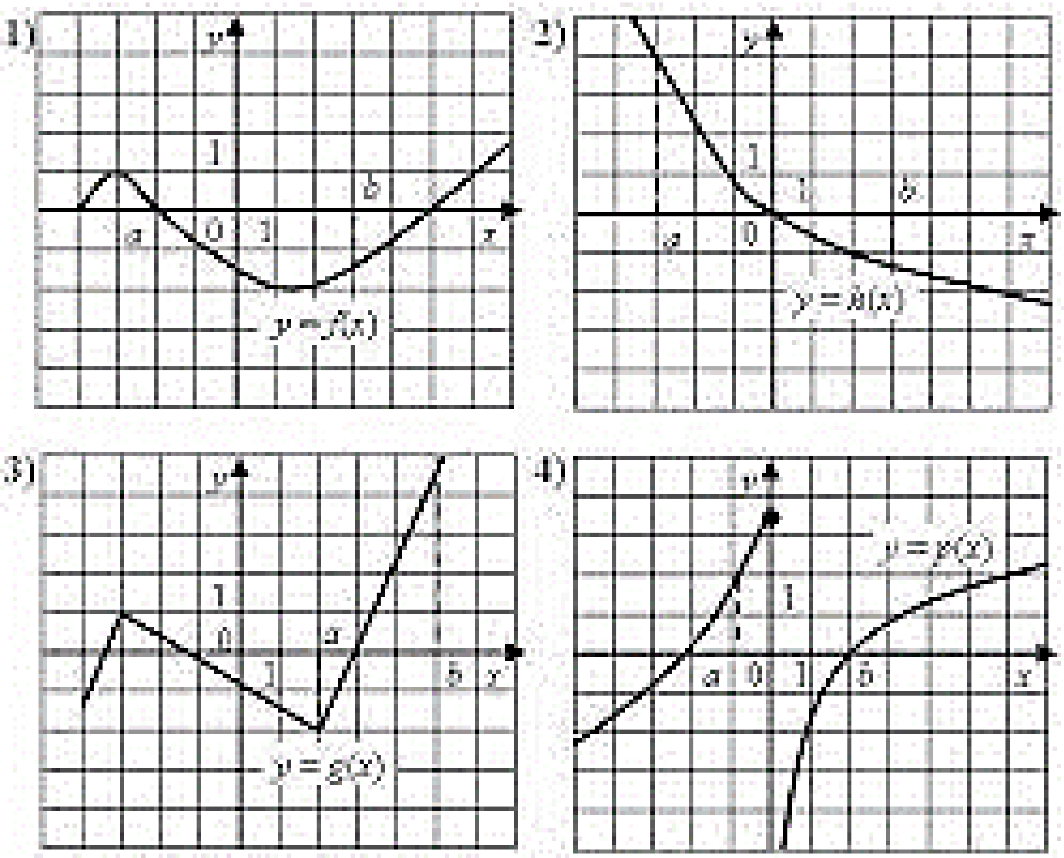
Решение**:**____

5) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



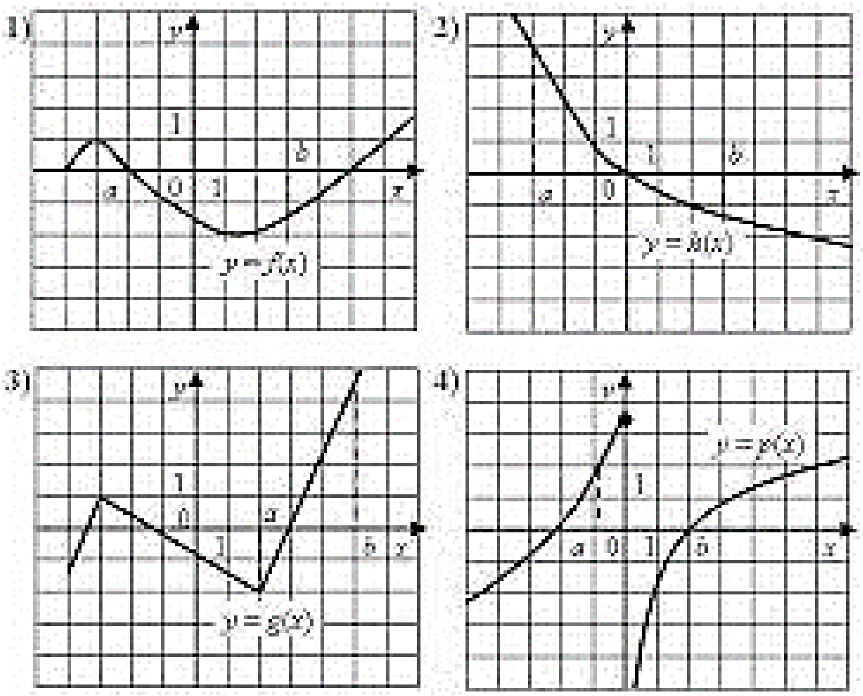
Решение:____

6) Какая из функций, заданных графиков, возрастает на отрезке [a;b]?



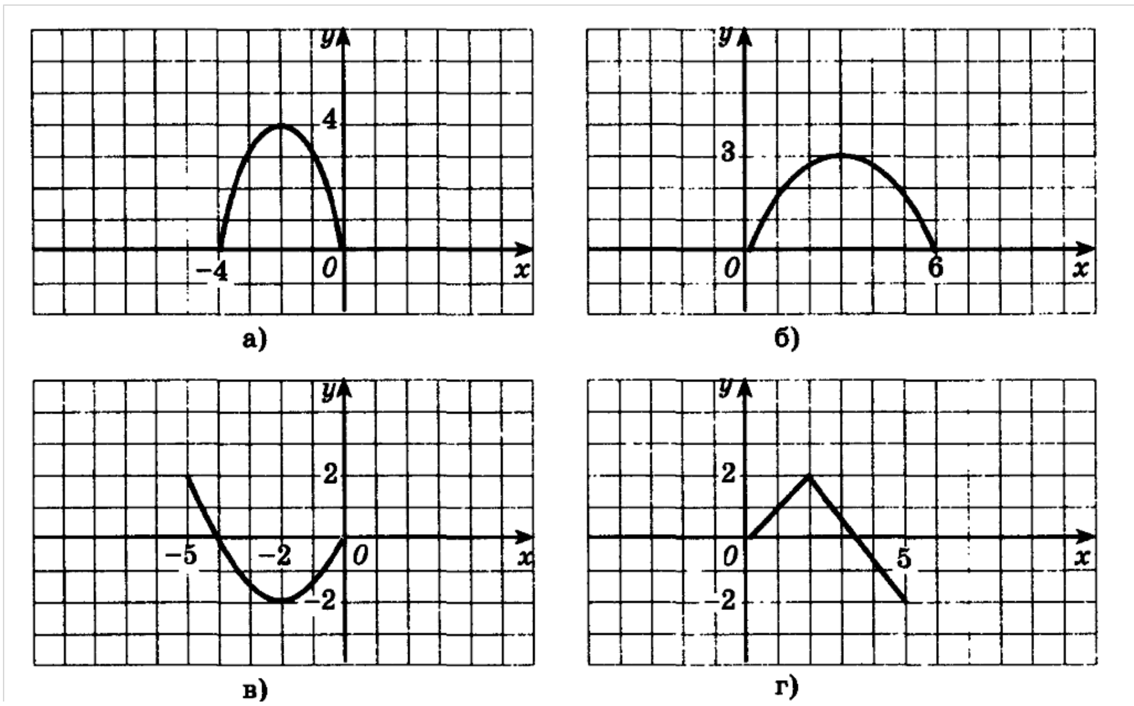
Решение: ____

7) Какая из функций, заданных графиков, убывает на отрезке [a;b]?



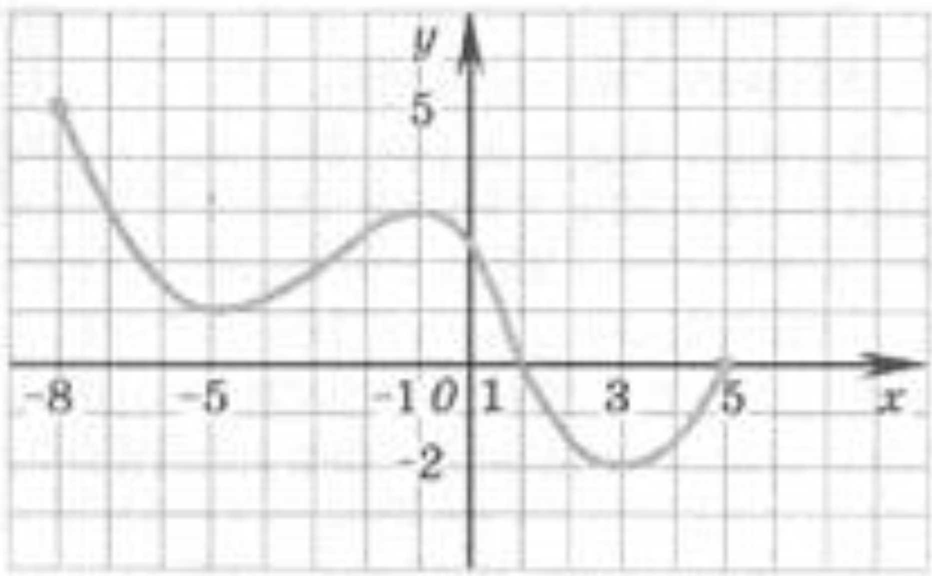
Решение:____

8) Определите график функции f, если известно:



Решение:____

9) Проведите по общей схеме исследование функции, заданной графиком



Решение:

Занятие № 16
Тема «Степенная функция, ее свойства и график»

В помощь студенту:
Степенная функция $y = x^p$, где p – заданное действительное число.

1) *Показатель p = 2n – четное натуральное число*

$D(y): x \in R \qquad E(y):\ y \geq 0$

Функция $y=x^{2n}$ четная, т.к. $(-x)^{2n} = x^{2n}$
Функция убывает на промежутке $(-\infty;0]$
Функция возрастает на промежутке $[0;+\infty)$

2) *Показатель p = 2n-1 – нечетное натуральное число*

$D(y): x \in R \qquad E(y):\ y \in R$

Функция $y=x^{2n-1}$ нечетная, т.к. $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$
Функция возрастает на промежутке $(-\infty;+\infty)$

3) *Показатель p = – 2n, где n – натуральное число*

$D(y): x \neq 0 \qquad E(y):\ y > 0$

Функция $y=x^{2n}$ четная, т.к. $(-x)^{-2n} = x^{-2n}$
Функция возрастает на промежутке $(-\infty;0)$
Функция убывает на промежутке $(0;+\infty)$

4) *Показатель p = – (2n-1), где n – натуральное число*

$D(y): x \neq 0 \qquad E(y):\ y \neq 0$

Функция $y=x^{-(2n-1)}$ нечетная, т.к. $(-x)^{-(2n-1)} = -x^{-(2n-1)}$
Функция убывает на промежутке $(-\infty;0)$
Функция убывает на промежутке $(0;+\infty)$

5) *Показатель p – положительное действительное нецелое число*

$D(y): x \geq 0 \qquad E(y):\ y \geq 0$

Функция возрастает на промежутке $[0;+\infty)$

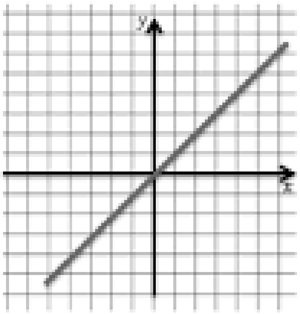
6) *Показатель p – отрицательное действительное нецелое число*

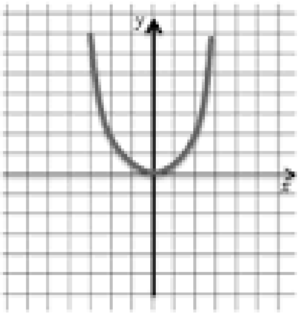
$D(y): x > 0 \qquad E(y):\ y > 0$

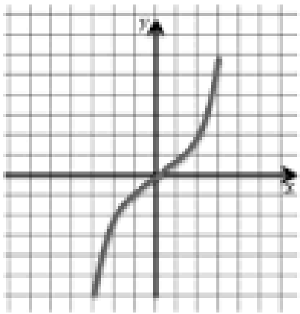
Функция убывает на промежутке $(0;+\infty)$

Задания:

1. Из предложенных графиков найти степенную функцию и определить вид, область определения и множество значений







1) 2) 3)

Ответ:

2. Исследуйте степенную функцию на четность:

а) $y=x^{10}$

б) $y=x$

Решение:

3. Исследуйте степенную функцию на ограниченность: $y=x^8$, $y=x^{-5}$

Решение:

4. Исследуйте степенную функцию на монотонность: $y=x^{12}$, $y=x^{-11}$
Решение:

В помощь студенту:

<u>Определение</u>: Пусть функция y=f(x) определена на множестве D, а E — множество её значений. Обратная функция по отношению к функции y=f(x) — это функция x=g(y), которая определена на множестве E и каждому $y \in E$ ставит в соответствие такое значение $x \in D$, что f(x)=y.
Таким образом, область определения функции y=f(x) является областью значений обратной к ней функции, а область значений y=f(x) — областью определения обратной функции.

<u>*Чтобы найти функцию, обратную данной функции y=f(x), надо*</u>:
1) В формулу функции вместо y подставить x, вместо x — y: x=f(y).

2) Из полученного равенства выразить y через x:

y=g(x).

Пример. Найти функцию, обратную функции y=2x-6.

1) x=2y-6

2) -2y=-x-6

y=0,5x+3.

Функции y=2x-6 и y=0,5x+3 являются взаимно обратными.

5. Построить графики функций, определить свойства функции, найти обратную функцию, построить графики обратной функции:

$f(x)=x^{10}$

$f(x)=x^{-3}$

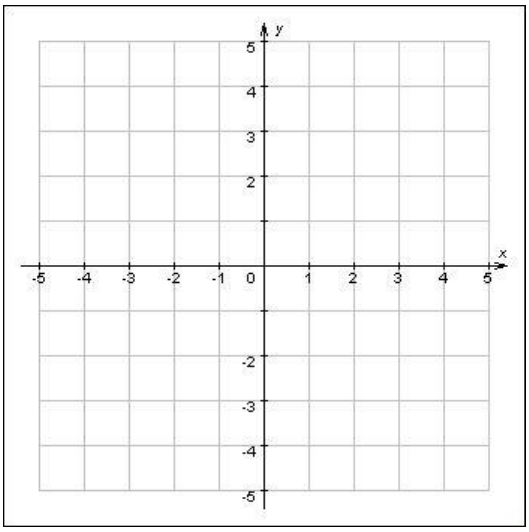
$f(x)=x^{5}$

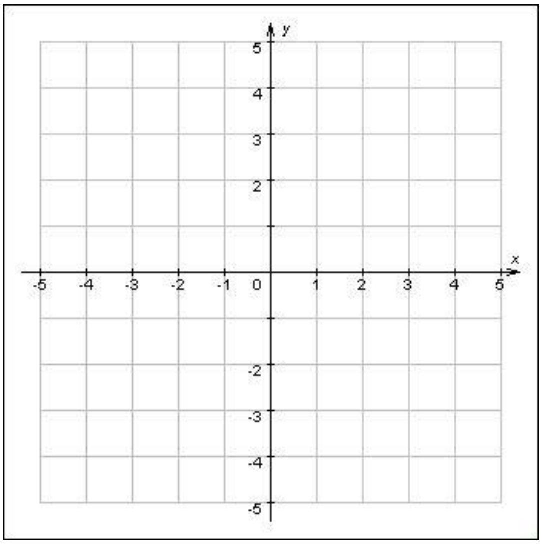
$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$

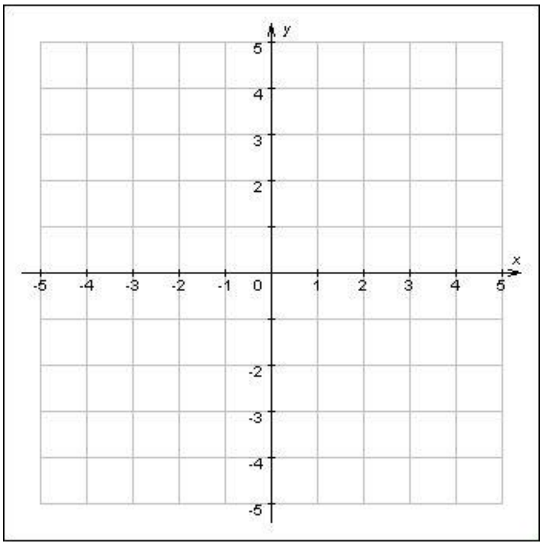
$f(x)=x^{-\frac{3}{2}}$

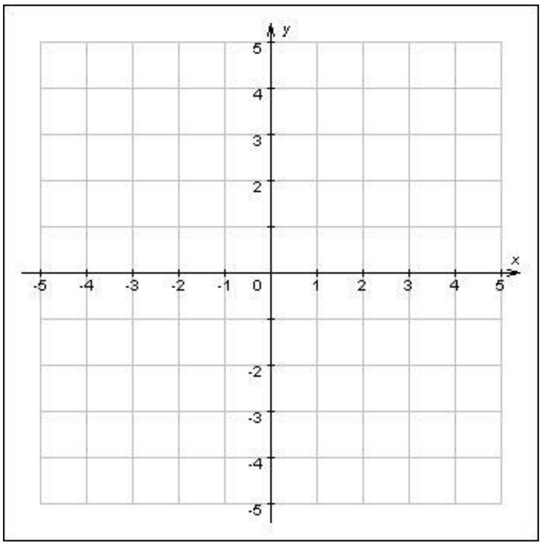
$f(x)=x^{0,5}$

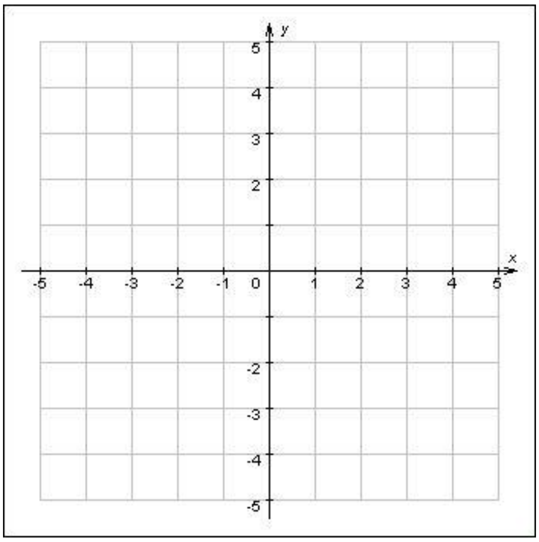
Решение:

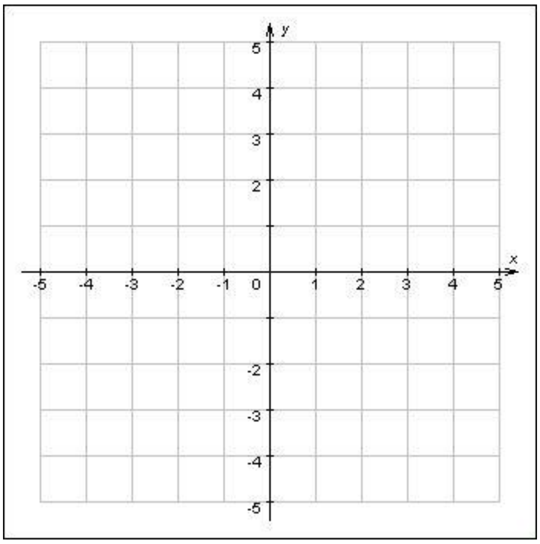






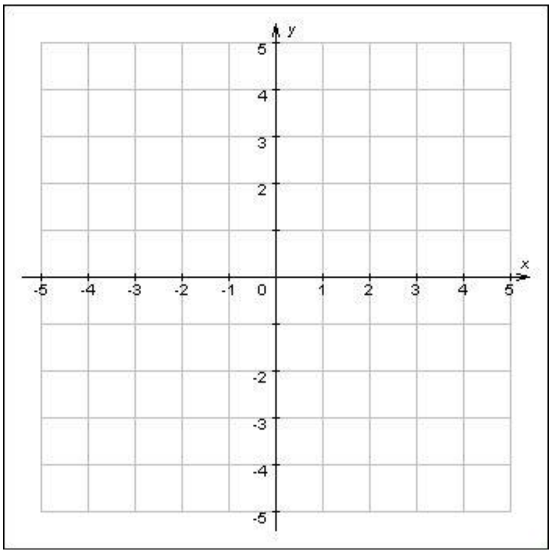






6. Проведите полное исследование функции и постройте ее график: $y=x^2-3$

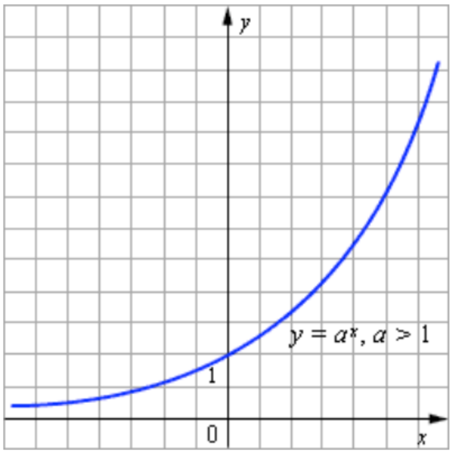
Решение:



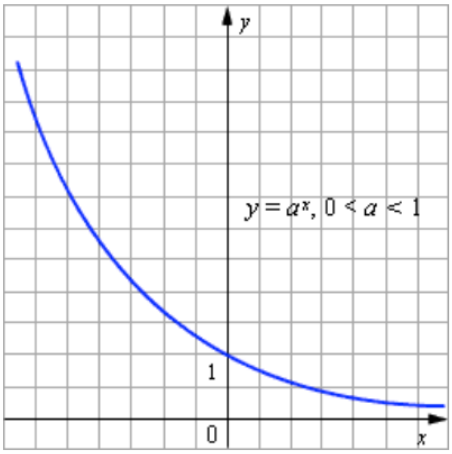
Занятие № 17
Тема «Показательная функция, ее свойства и график»

В помощь студенту:

Опр: Показательной функций называется функция вида $f(x)=a^x$, где основание положительная константа.



Функция $y = a^x$ при $a > 1$



Функция $y = a^x$ при $0 < a < 1$

Свойства функции:

1. D(y): множество R всех действительных чисел;
2. E(y): множество всех положительных чисел;
3. Показательная функция $y=a^x$ является возрастающей на множестве всех действительных чисел, если a>1,и убывающей, если 0<a<1;
4. Не является ни четной, ни нечетной;
5. Не ограничена сверху, ограничена снизу;
6. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения;
7. Непрерывна;
8. Если a>1 ,то функция выпукла вниз.

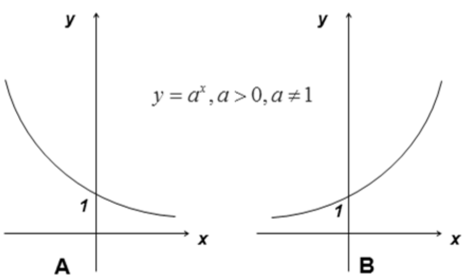
Задания:

1. Из предложенного списка функций, выбрать ту функцию, которая является показательной:
   а) $y=2x$
   б) $y=x^2$
   в) $y=2^x$
   г) $y=\sqrt[7]{x}$

2. Укажите вид графика для функции:

1. $y=\pi^x$

2. $y=0,48^x$



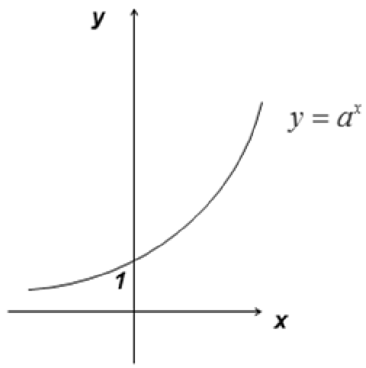
3. Дан график функции. Укажите функцию:

1. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$;

2. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$;

3. $y=2^x$;

4. $y=2^{-x}$.



4. Выберите функцию, возрастающую на $(0;\infty)$

1. $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

2. $y=\left(\frac{1}{7}\right)^x$

3. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

4. $y=10^{-x}$

5. Выберите функцию, убывающую на $(-\infty;0)$

1. $y=5^x$;

2. $y=10^x+1$;

3. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$;

4. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$.

6. Укажите область значений функции $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x-1$:

1. $(0;+\infty)$;

2. $(-1;+\infty)$;

3. $[0;+\infty)$;

4. $(-\infty;-1)$.

7. Какое из указанных чисел входит в область значений функции $y=2^x+4$?

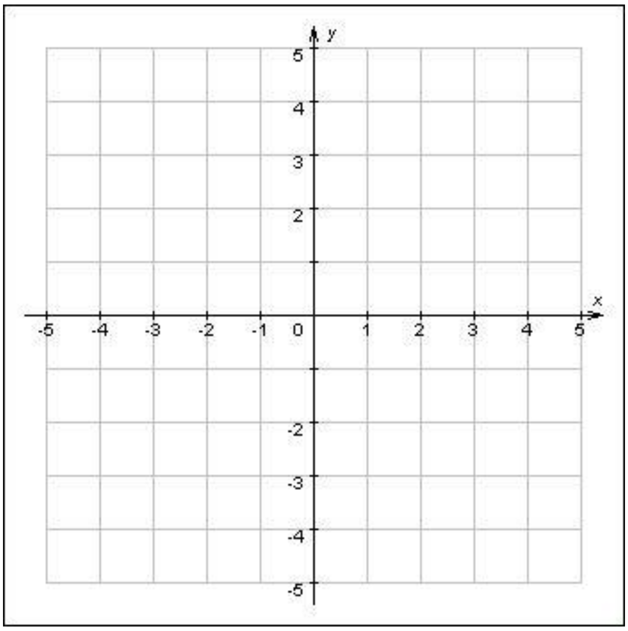
1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 5.

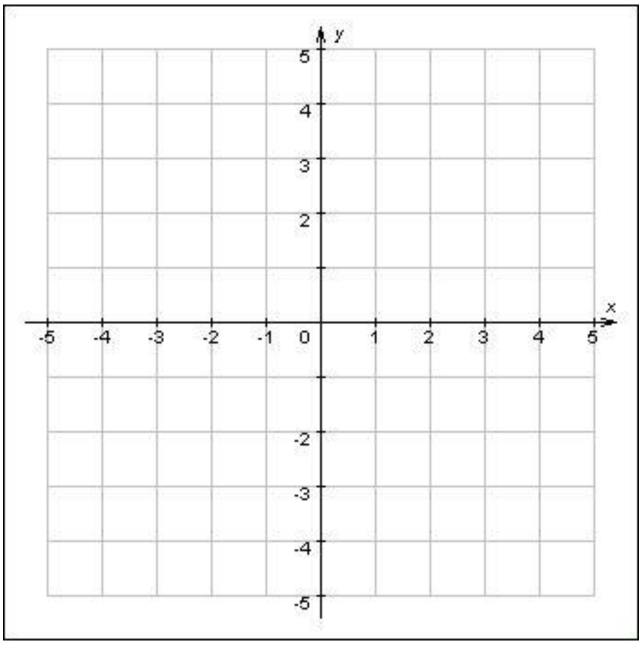
8. Исследовать функцию

а) $y=5^x$

б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

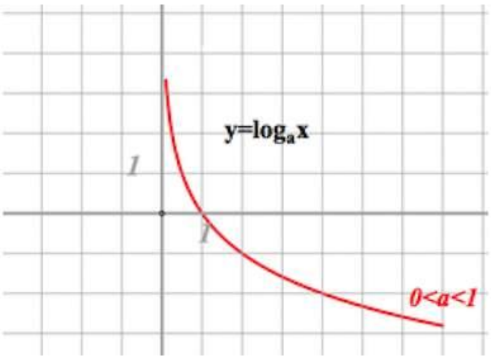
Решение:

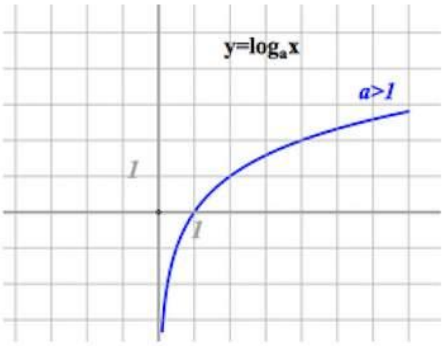




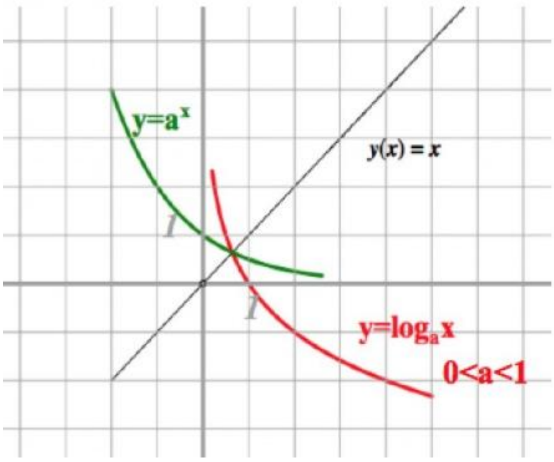
Занятие № 18
Тема «Логарифмическая функция, ее свойства и график»

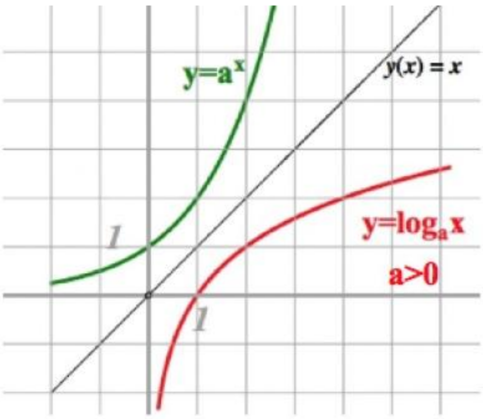
В помощь студенту:





1. Область определения логарифмической функции – множество всех положительных чисел.
2. Область значений логарифмической функции – множество всех действительных чисел.
3. Логарифмическая функция на всей области определения возрастает (при a>0) или убывает (при 0<a<1)
4. Функция не четная, ни нечетная.
5. Нули функции: x=1
6. Функция не ограничена сверху, не ограничена снизу.
7. Непрерывна.
8. Обратная функция: $y=a^x$





Задания.

1. Дайте определение логарифму

Ответ:

____

____

2. Вычислите:

а) $\log_3 1=$

б) $\log_4 4=$

в) $\log_2 8=$

г) $\log_2 \frac{1}{8} =$

3. Выполните действия:

а) $\log_3 2 + \log_3 1{,}5 =$

б) $\log_6 12 - \log_6 2 =$

4. Перечислите основные свойства функции и постройте ее график:

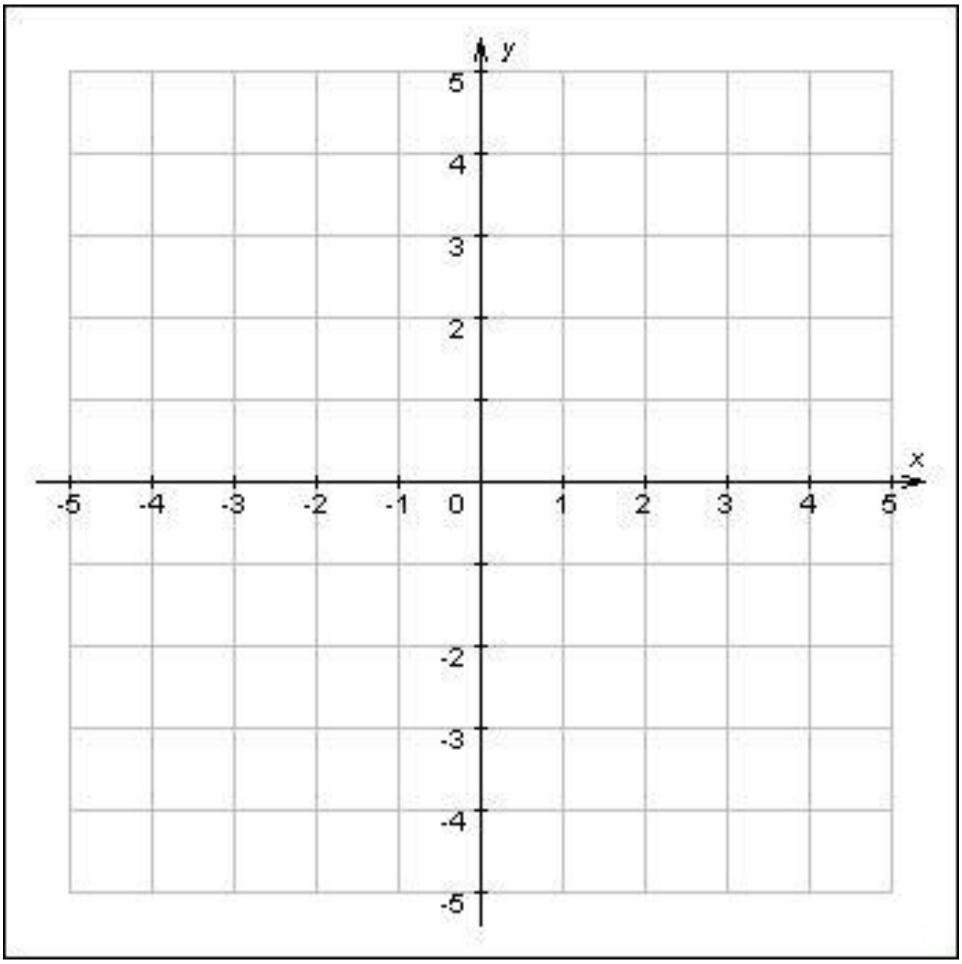
а) $y = \log_3 x$

Решение:

Свойства:

1. ____
2. ____
3. ____
4. ____
5. ____
6. ____
7. ____
8. ____

График:



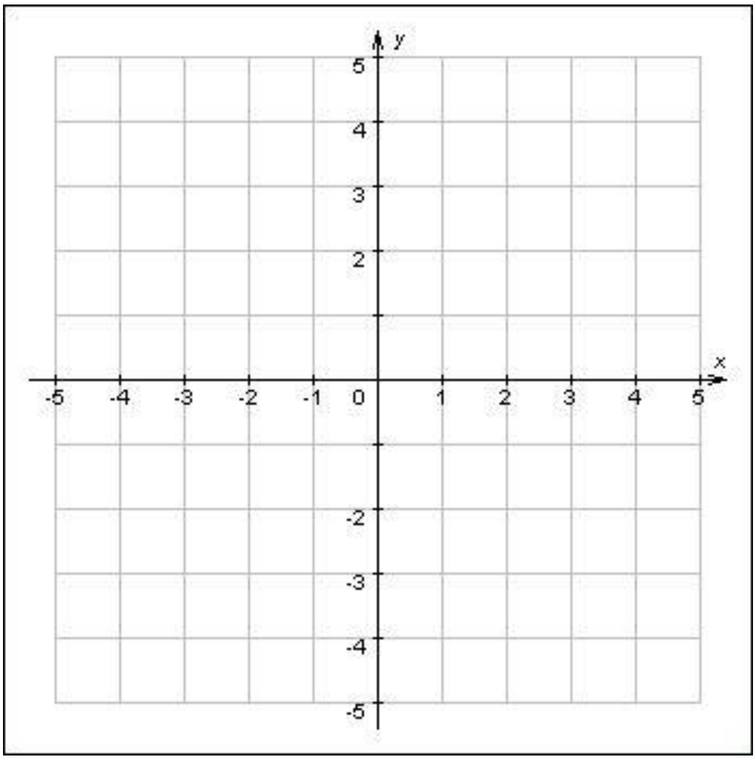
б) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

Решение:

Свойства:

1. ______
2. ______
3. ______
4. ______
5. ______
6. ______
7. ______
8. ______

График:



5. Сравнить числа:

а) $\log_4 7 \ \ldots \ \log_4 23$

б) $\log_{\frac{1}{3}} 0{,}8 \ \ldots \ \log_{\frac{1}{3}} 1$

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке I:

а) $f(x) = \log_9 x, \ I = \left[\frac{1}{9}; 9\right]$

Решение:

______
______
______
______
______
______

б) $f(x)=\log_{\frac{1}{4}} x$, $I=[1;4]$

Решение:

____
____
____
____
____
____

7. Исследуйте функцию на монотонность:

а) $f(x)=\log_{2,6} x$

Решение:

____
____
____
____
____

б) $f(x)=\log_{0,9} x$

Решение:

____
____
____
____
____

8. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\log_9(4x-1)$

Решение:

____
____
____
____
____

б) $f(x)=\log_{\frac{1}{9}}(7-2x)$

Решение:

____
____
____
____
____
____

в) $f(x) = \log_9(8x+9)$

Решение:

в) $f(x) = \log_{0,3}(2-3x)$

Решение:

д) $f(x) = \log_5(x^2-5x+6)$

Решение:

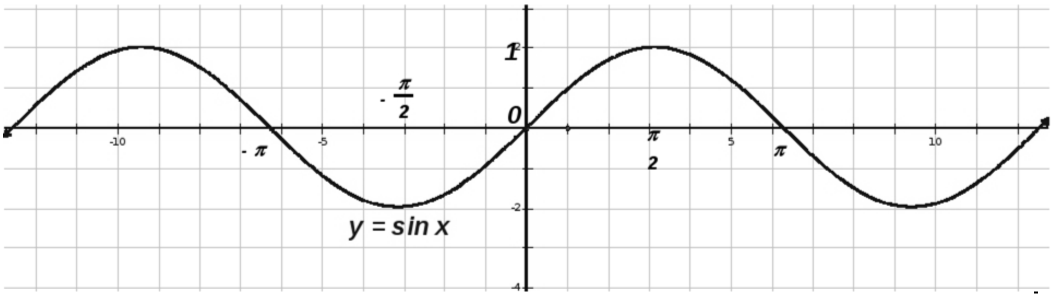
Занятие № 19

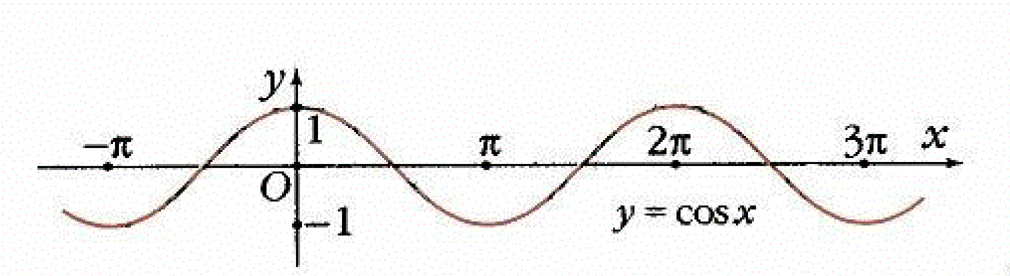
Тема «Свойства и графики тригонометрических функций»

В помощь студенту.

1. Свойства и графики тригонометрических функций

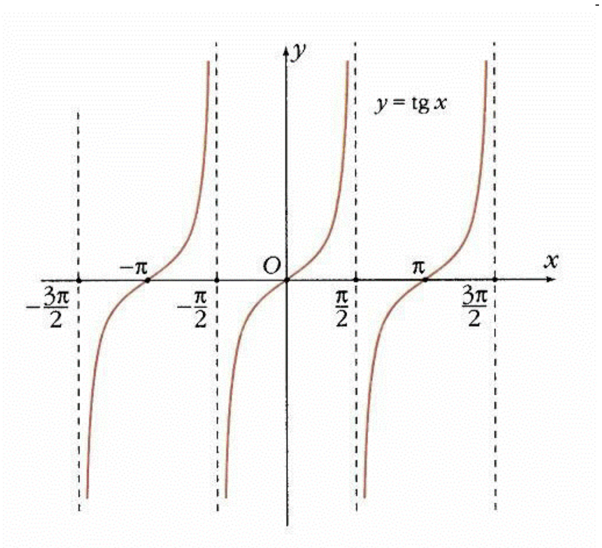
Графики функций: y = sin x, y = cos x, y = tg x, y = ctg x

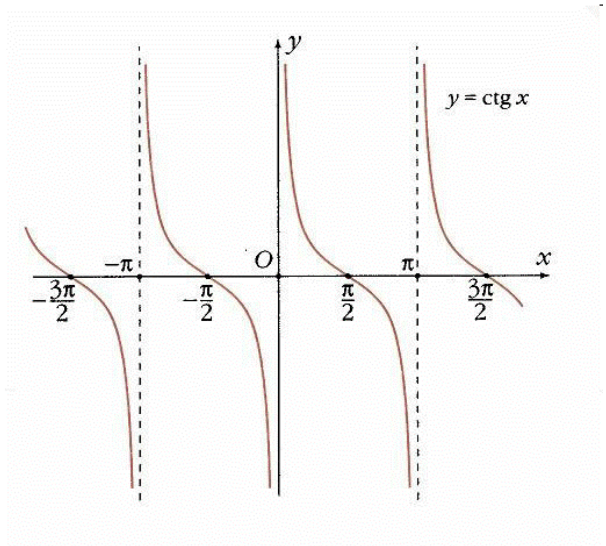




Правило построения графикову=sinx и y=cosx:

1. Изображаем координатные оси Х (ось абсцисс) и У (ось ординат). По оси ординат откладываем числа 1, -1. По оси абсцисс размечаем точки соответствующие радианной мере угла поворота (если 1-две клетки, то π≈3, 14 – шесть клеток тетрадного листа)
2. Каждому значению радианной мере углов на оси абсцисс ставим в соответствие значение синусов (косинусов) этих углов по оси ординат.
3. Соединяем плавно получившиеся точки (график «волнообразный»)





Правило построения графиков y=tgx и y=ctgx:

1. Изображаем координатные оси Х (ось абсцисс) и У (ось ординат). По оси ординат откладываем числа 1, -1. По оси абсцисс размечаем точки соответствующие радианной мере угла поворота (если 1-две клетки, то $\pi\approx3$, 14 – шесть клеток тетрадного листа)
2. Каждому значению радианной мере углов на оси абсцисс ставим в соответствие значение тангенсов (котангенсов) этих углов по оси ординат. В точках, в которых тангенс (котангенс) не существует, проведем пунктирные линии.
3. Соединяем плавно получившиеся точки (график прерывистый)

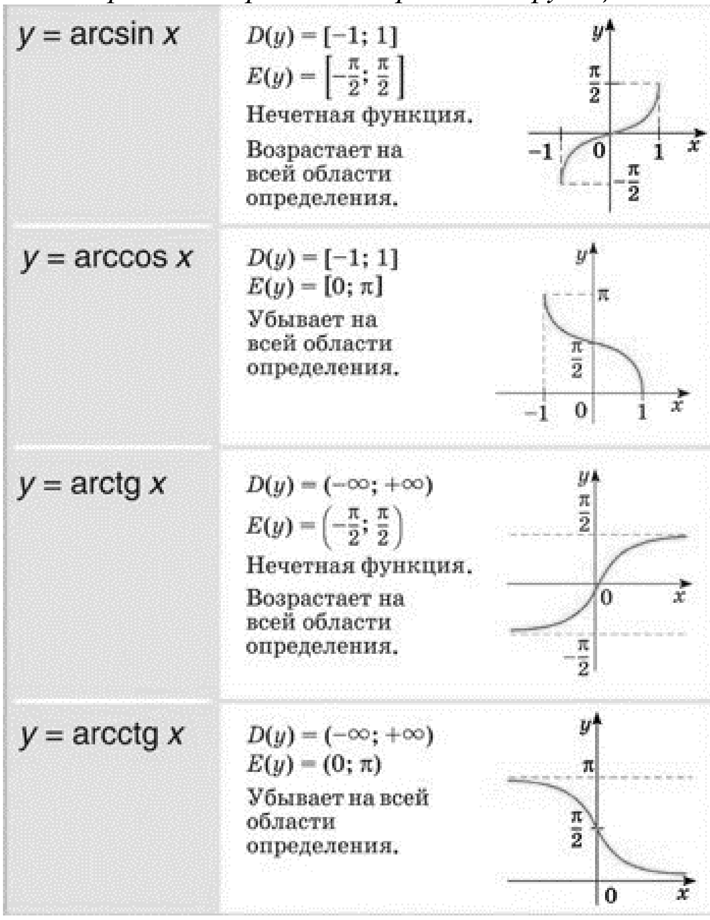
Свойства	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = tg\ x$	$y = ctg\ x$
D(f) - область определения функции	***D(sin)*** = **R** - множество всех действительных чисел	***D(cos)*** = **R** - множество всех действительных чисел	***D(tg)*** = $(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n)$	***D(ctg)***= $(\pi n; \pi+\pi n)$
E(f) - множество значений функции	***E(sin)*** = $[-1;1]$	***E(cos)***= $[-1;1]$	***E(tg)*** = R	***E(ctg)*** = R
Четность функции	нечетная $\sin(-x) = -\sin x$	четная $\cos(-x) = \cos x$	нечетная $tg(-x)=-tgx$	нечетная $ctg(-x)=-ctgx$
Наименьший положительный **период**	$T = 2\pi$ $\sin(x+2\pi n)=\sin x$, $n\in Z$	$T = 2\pi$ $\cos(x+2\pi n)=\cos x$, $n\in Z$	$T = \pi$ $tg(x+\pi n)=tgx$, $n\in Z$	$T = \pi$ $ctg(x+\pi n)=ctgx$, $n\in Z$
Нули функции	$\sin x = 0$ при $x=\pi n$, $n\in Z$	$\cos x = 0$ при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$	$tgx = 0$ при $x=\pi n$, $n\in Z$	$ctg\ x = 0$ при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$
Промежутки знакопостоянства ***f(x) > 0***	$\sin x > 0$ для всех $x\in(2\pi n;\pi+2\pi n), n\in Z$	$\cos x > 0$ для всех $x\in(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n), n\in Z$	$tg\ x > 0$ для всех $x\in(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n)$, $n\in Z$	$ctg\ x > 0$ для всех $x\in(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n)$, $n\in Z$
Промежутки знакопостоянства ***f(x) < 0***	$\sin x < 0$ для всех $x\in(\pi+2\pi n;2\pi+2\pi n)$ $n\in Z$	$\cos x < 0$ для всех $x\in(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n), n\in Z$	$tg\ x < 0$ для всех $x\in(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi n), n\in Z$	$ctg\ x < 0$ для всех $x\in(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi n), n\in Z$
Наибольшее значение функции	$max(\sin) = 1$ в точках $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$	$max(\cos) = 1$ в точках $x=2\pi n$, $n\in Z$	нет	нет
Наименьшее значение функции	$min(\sin) = -1$ в точках $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$	$min(\cos) = -1$ в точках $x=\pi+2\pi n, n\in Z$	нет	нет
Промежутки **возрастания** функции	$[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n]$	$[-\pi+2\pi n;2\pi n]$	$(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n)$	нет
Промежутки **убывания** функции	$[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n]$	$[2\pi n;\pi+2\pi n]$	нет	$(\pi n;\pi+\pi n)$

2. Понятие арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса, обратные тригонометрические функции

arc – дуга, **arc**sina – дуга sin которой равен a (или угол sin которой равен a)
Аркфункции это конкретные числа.

Обозначение	Определение	Пример	Свойства
arcsina	Число из отрезка [-π/2; π/2] синус которого равен a, называется арксинусом числа a	$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, так как $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$	arcsin(-a)=- arcsina
arccosa	Число из отрезка [0; π] косинус которого равен a, называется арккосинусом числа a	$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, так как $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$	arccos(-a)=π- arccosa
arctga	Число из интервала (-π/2; π/2), тангенс которого равен a, называется арктангенсом числа a	$arctg1=\frac{\pi}{4}$, так как $tg\frac{\pi}{4}=1$	arctg(-a)= - arctga
arcctga	Число из интервала(0; π), котангенс которого равен a, называется арккотангенсом числа a	$arcctg\,0=\frac{\pi}{2}$, так как $ctg\frac{\pi}{2}=0$	arcctg(-a)=π- arcctga

Обратные тригонометрические функции



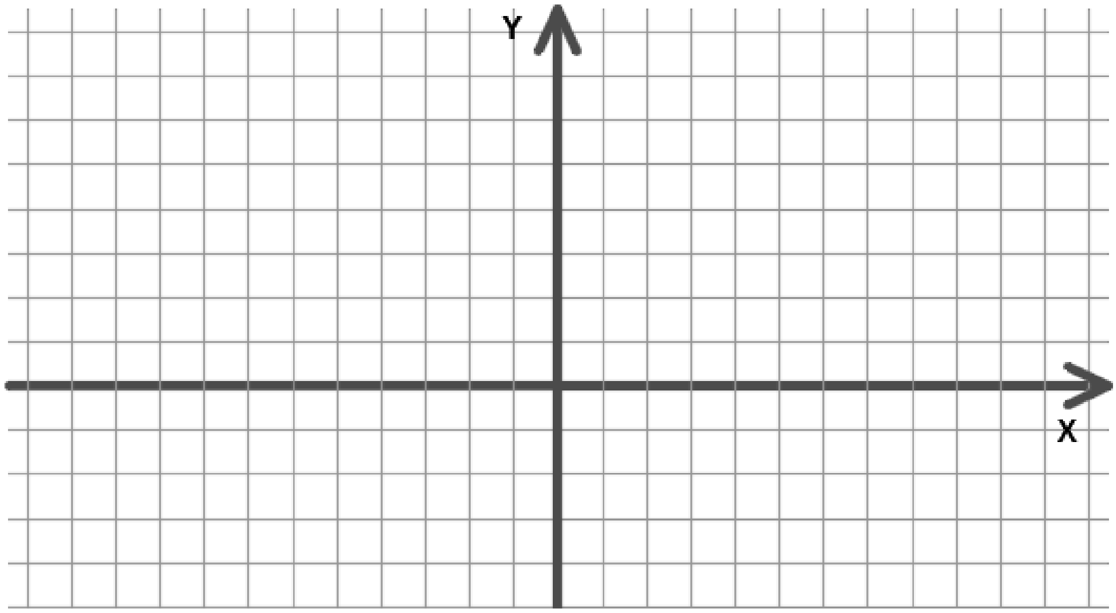
$y = \arcsin x$	$D(y) = [-1;\ 1]$ $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ Нечетная функция. Возрастает на всей области определения.
$y = \arccos x$	$D(y) = [-1;\ 1]$ $E(y) = [0;\ \pi]$ Убывает на всей области определения.
$y = \mathrm{arctg}\, x$	$D(y) = (-\infty;\ +\infty)$ $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ Нечетная функция. Возрастает на всей области определения.
$y = \mathrm{arcctg}\, x$	$D(y) = (-\infty;\ +\infty)$ $E(y) = (0;\ \pi)$ Убывает на всей области определения.

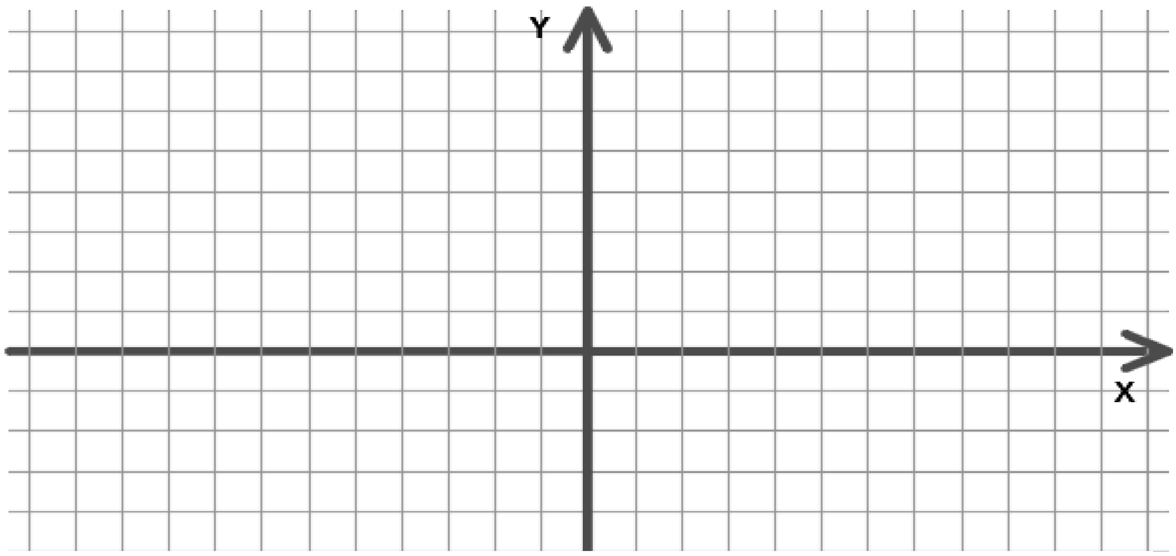
Задания:

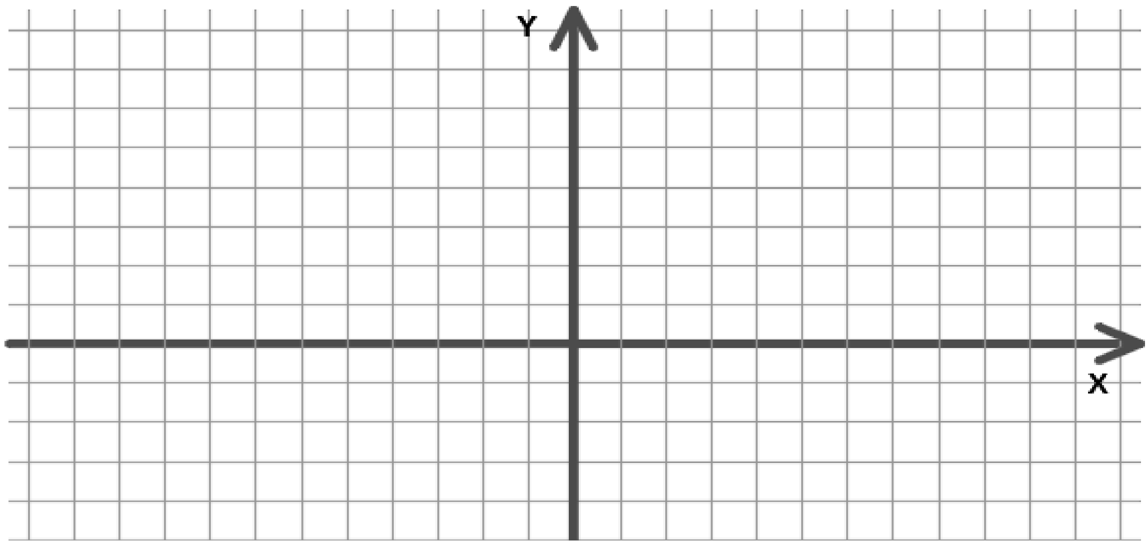
1. Дайте понятие синуса угла ____
2. Дайте понятие косинуса угла ______________________________________
3. Дайте понятие тангенса угла ______________________________________
4. Дайте понятие котангенса угла____________________________________
5. Заполните таблицу:

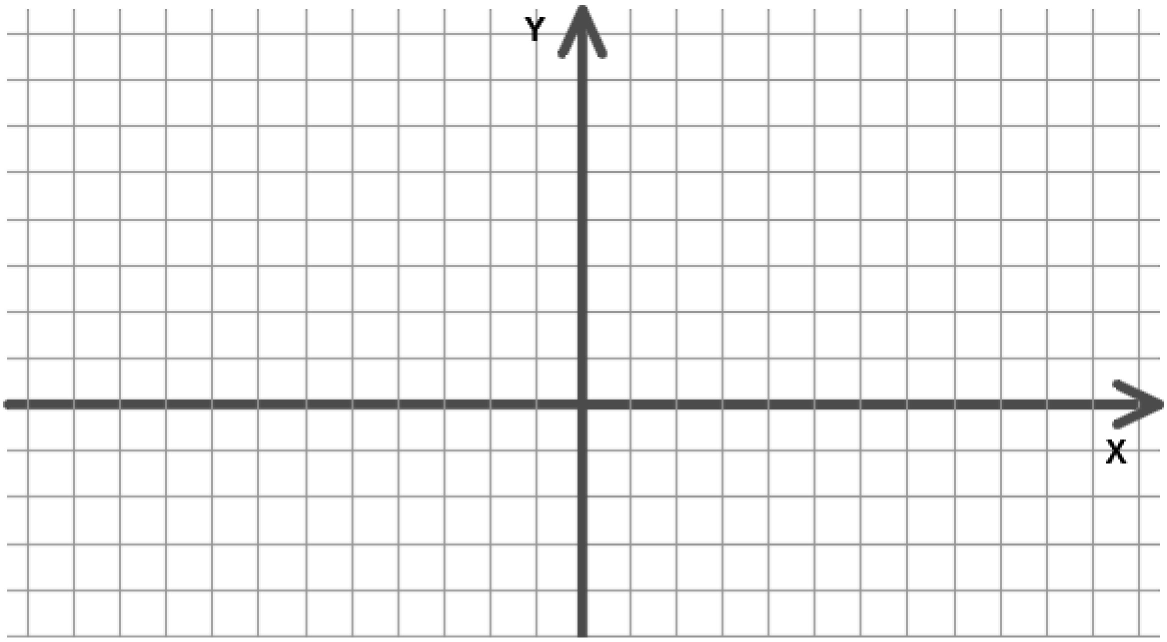
α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
sinα								
cosα								
tgα								
ctgα								

6. Построить график функции y = sin x ,y = cosx, y = tg x ,y = ctg x


Y
X


Y
X


Y
X


Y
X

Занятие № 20

Тема «Свойства и графики тригонометрических функций»

В помощь студенту:

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$ctg\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

1. Ответьте на вопросы:

Каковы свойства и график функции y=sinx?

Ответ:

____

____

Каковы свойства и график функции y=cosx?

Ответ:

____

____

Каковы свойства и график функции y=tgx?

Ответ:

____

____

Каковы свойства и график функции y=ctgx?

Ответ:

____

____

2.Верны ли утверждения:

1) Тригонометрические уравнения sin x = a, cos x = a, tg x = a, ctg x = a всегда имеют решения.

Ответ:

____

____

2) График тригонометрической функции y = f(-x) можно получить из графика функции y = f(x) <u>только</u> с помощью преобразования симметрии относительно оси ОУ.

Ответ:

____

____

3. Решите:

а) Проверьте, принадлежат ли точки графикам функций: y = sin x точка с координатами $(\pi;\ 0)$, y = cos x точка с координатами $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$.

Ответ:

____
____
____
____
____

б) Найти наибольшее и наименьшее значения функций: y = sin x на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right]$, y = cos x на полуинтервале $\left[-\pi;\frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ:

____
____
____
____
____

в) Возможно ли, что область определения функции y=cos9x , x∈(−∞;0)∪(0;+∞)

Ответ:

____
____
____
____
____

г) Найдите координаты точек пересечения с осями координат:
y=sinx, y=cosx

Ответ:

4. Вычислить:

1) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=$____

2) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$=____
3) $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$=____
4) $\mathrm{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$=____
5) $\arcsin(-\frac{1}{2})$=____
6) $\arccos(-\frac{1}{2})$=____
7) $\mathrm{arctg}(-\frac{\sqrt{3}}{3})$=____
8) arcctg(-1)=____
9) $\arccos(-\frac{1}{2})$=____

5. Вычисли множество значений функций:

а) y=sinx+2

Ответ:

б) y=2cosx

Ответ:

в) y=3-2cosx

Ответ:

6. Для данной функции найдите область определения:

а) y=sinx+1

Ответ:

б) $y=\sin(x+45^0)$

Ответ:

Занятие № 21

Тема «Преобразования графиков»

В помощь студенту:

Функция	Преобразование графика функции
y = f(x)+a	Параллельный перенос вдоль оси OY на A единиц вверх, если A>0, и на |A| единиц вниз, если A<0.
y = f(x+b)	Параллельный перенос вдоль оси OX влево, если b > 0; вправо, если b < 0.
y = kf(x)	Растяжение вдоль оси OY относительно оси OX в *k* раз, если k > 1, и сжатие в 1/*k* раз, если 0 < k < 1.
y = f(mx)	Сжатие вдоль оси OX относительно оси OY в *m* раз, если m> 1, и растяжение в 1/*m*раз, если 0 <m< 1.
y = -f(x)	Симметричное отражение относительно оси OX
y = f(-x)	Симметричное отражение относительно оси OY.
y = |f(x)|	Часть графика, расположенная ниже оси OX, симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть остается без изменения.
y = f(|x|)	Часть графика, расположенная в области x≥0, остается без изменения, а его часть для области x ≤0 заменяется симметричным отображением относительно оси OY части графика для x ≥ 0.

Вопросы:

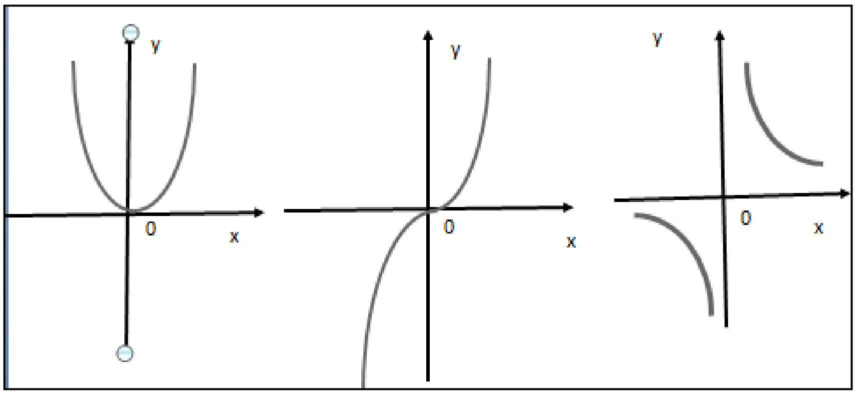
1. Назовите графики функций. Соотнесите графики и функции:

$y=x^5$ ______________ $y=\frac{2}{x}$ ______________

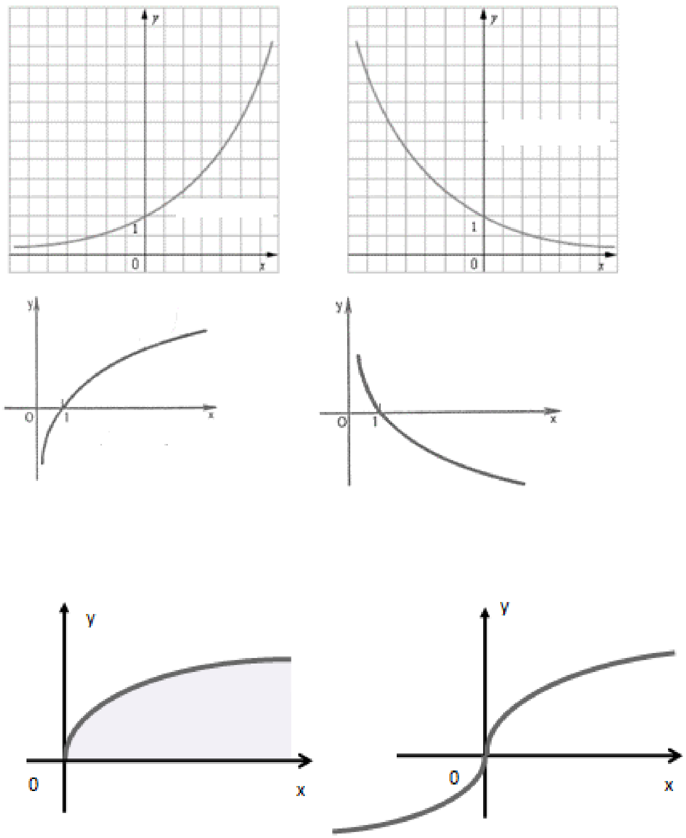
$y=x^4$ ______________

$y=x^3$ ______________

$y=x^6$ ______________



2. Назовите функции, чьи графики представлены ниже:



Ответ:

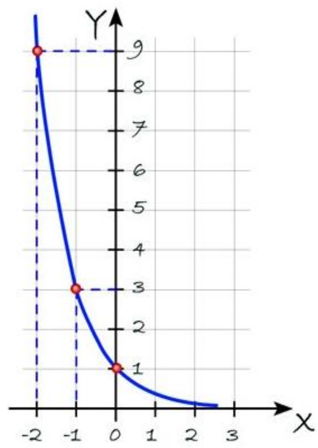
3. Выберите функцию, график которой изображен на рисунке:

1) $y=3^x$

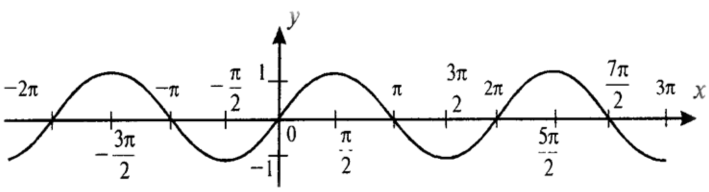
2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

3) $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$

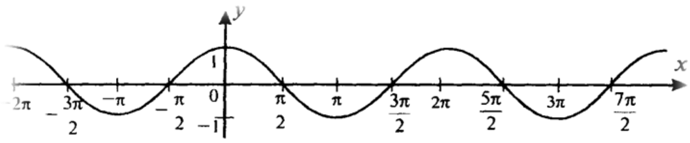
4) $y=1{,}3^x$



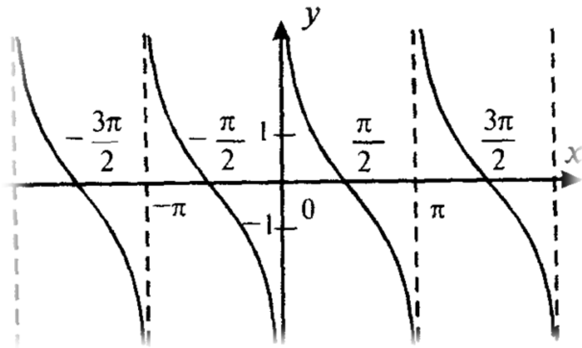
4. Назовите функции, чьи графики представлены ниже:



Ответ:________________



Ответ:_________________



Ответ:______________

Задания. Постройте графики следующих функций

1) $y=x^2-4$,
2) $y=(x-2)^2-4$
3) $y=\frac{1}{x}+3$,
4) $y=\frac{1}{x+3}$
5) $y=|x|-1$,
6) $y=|x-1|$
7) $y=\sqrt{x}+2$,
8) $y=\sqrt{x+3}$
9) $y=3^x+1$,
10) $y=\log_3(x-4)$
11) $y=2\cos x$,
12) $y=\sin 2x$,
13) $y=-\sin x$,
14) $y=\sin x+1$,
15) $y=\cos(x+\frac{\pi}{2})$

Ответ:

РАЗДЕЛ. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Занятие № 22

Тема «Рациональные уравнения и неравенства»

В помощь студенту:

Уравнением с одним неизвестным называется равенство вида: $f(x) = g(x)$

Равносильными уравнениями называются такие уравнения, которые имеют одни и те же корни, например, уравнения $x^2 = 3x - 2$ и $x^2+2 = 3x$ равносильны (оба имеют корни $x=1$ и $x=2$).

Основные методы решения уравнений:

- разложение на множители;
- замена переменных;
- сведение к системе уравнений и неравенств;
- функциональный;
- графический.

Неравенства - это соотношения вида:

$f(x)>g(x)$, $f(x)<g(x)$ или $f(x) \geq g(x)$, $f(x)\leq g(x)$

Рациональные уравнения и неравенства:

- линейные,
- квадратные,
- дробно-рациональные,
- содержащие переменную под знаком модуля.

Задания.

1. Решите уравнения:

а) $3(x-2)-5=4-(5x-1)$

Решение:

____
____
____
____
____

б) $|2x-3|=5$

Решение:

____
____
____
____
____

в) $7-2(3-x)=4(x-1)+5$

Решение:

____
____
____
____
____

г) $\frac{3x+1}{5}=2-\frac{4(x-3)}{15}$

Решение:

____

____

____

____

____

д) $\frac{x-1}{2}+x<1.5x+3.5$

Решение:

____

____

____

____

____

е) $x^2+2x-15=0$

Решение:

____

____

____

____

____

ж) $7x^2+5x=0$

Решение:

____

____

____

____

____

з) $(x-1)(x+2)(x-3)(x-4)<0$

Решение:

____

____

____

____

____

2. Определите, при каких значениях x имеет смысл выражения:

$2x^2+6x+17>0$

Решение:

____

____

____

____

____

3. Разложите на простые множители: $x^3+3x^2=0$

Решение:

____

____

4. Решите уравнение, используя метод введения новой переменной:
$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
Решение:

5. Решите неравенства:

1) $x^4 - 3x^2 + 2 \leq 0$

Решение:

2) $\frac{(x+5)(x-7)}{3x-1} > 0$

Решение:

3) $\frac{x^2-3x+5}{x-1} > 0$

Решение:

6. Решить графически:

$$x - \frac{6}{x} + 1 = 0$$

Решение:

Занятия № 23

Тема «Иррациональные уравнения»

В помощь студенту:

Опр: Уравнения, в которых переменная находится под знаком корня, называются *иррациональными*

Алгоритм решения иррациональных уравнений

1. Уединяем корень
2. Возводим оби части уравнения в n – степень
3. Решаем полученное уравнение, находим корни
4. Проверка
5. Ответ

Пример:

$\sqrt{2x+1} = 3.$

Избавляемся от корней, поскольку корень второй степени, то обе части уравнения возводим в квадрат и упрощаем:

$2x + 1 = 9$

$2x = 8$

$x = 4$

Ответ: x=4

Задания

1. Решите иррациональные уравнения:

а) $\sqrt{x^2 + 2x + 10} = 2x - 1$

Решение:

____

____

____

____

____

б) $\sqrt{x+17} - \sqrt{x-7} = 4$

Решение:

____

____

____

____

____

в) $\sqrt{x^4 + 19} = 10$

Решение:

____

____

____

____

____

г) $\sqrt[3]{x^2 - 28} = 2$

Решение:

д) $\sqrt[3]{x^2-9}=-3$

Решение:

е) $\sqrt{x+1}=x-5$

Решение:

ж) $x+\sqrt{2x+3}=6$

Решение:

з) $\sqrt{2x\ \ -1}=x-2$

Решение:

2. Решить уравнение

а) $\sqrt{x}=2-x$

Решение:

б) $2-\sqrt{x+1}=1$

Решение:

в) $(x^2-9)\sqrt{2-x}=0$

Решение:

Занятия № 24

Тема «Иррациональные неравенства»

В помощь студенту:

Опр: Неравенства, в которых переменная находится под знаком корня, называются *иррациональными*

При решении иррациональных неравенств используются те же приёмы, что и при решении иррациональных уравнений:

- возведение обеих частей неравенства в одну и ту же степень;
- введение новых (вспомогательных) переменных и др.

Обычный способ решения таких неравенств заключается в сведении их к иррациональным неравенствам (не содержащим корней). Освободиться от корней иногда удаётся путём возведения обеих частей неравенства в степень. При этом, в силу того, что проверка полученных решений подстановкой затруднена, необходимо следить за тем, чтобы при преобразовании неравенств каждый раз получалось неравенство, равносильное данному.

При решении иррациональных неравенств следует помнить, что при возведении обеих частей неравенства в нечётную степень всегда получается неравенство, равносильное исходному неравенству. Если же обе части неравенства возводят в чётную степень, то полученное неравенство будет равносильно исходному и иметь тот же смысл, лишь в случае, если обе части исходного неравенства неотрицательны.

Решать иррациональные неравенства можно, придерживаясь, например, следующего алгоритма:

1) найти область допустимых значений заданного неравенства.
2) руководствуясь предложениями о равносильности неравенств, решить заданное неравенство.
3) из найденных решений отобрать значение переменной, принадлежащее области определения заданного неравенства.

Задания

1. Решить неравенство:

а) $\sqrt{5-x} \leq 3$

Решение:

____
____
____
____
____
____
____
____
____

б) $\sqrt{(x-2)(1-2x)} > -1$

Решение:

____
____
____
____
____
____

в) $\sqrt{x^2 - 16} \geq 1$
Решение:

г) $(\sqrt{x} - 3)(x^2 + 1) > 0$
Решение:

№ 2. Решить неравенство

а) $\sqrt{x - 1} < 3 - x$
Решение:

б) $\sqrt{2x^2 - 18x + 16} < x - 4$
Решение:

в) $\sqrt{x+3} < x+1$

Решение:

Занятия № 25
Тема «Показательные уравнения и неравенства»

Вопросы:
1) Понятие показательной функции, ее график
2) Область определения и область значения показательной функции
3) Монотонность показательной функции

Ответ:

4) Вычислите:
   а) $3^4=$
   б) $2^1=$
   в) 4^0
   г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=$
   д) $8^{\frac{2}{3}}=$
   е) $3^{a+b}=$
   ж) $3^{a-b}=$

В помощь студенту.

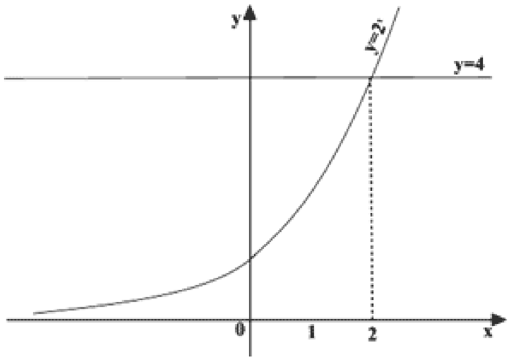
Показательные уравнения

Уравнение $a^x = b$ называется показательным уравнением $(a^x > 0, a \neq 1)$.
Если $b < 0$ или $b = 0$, то уравнение не имеет решение.
Решение: $b = a^c$, c - является решением: $a^x = a^c \Rightarrow x = c$
Пример: $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$

Способы решения показательных уравнений

Выделяют две группы способов: графический и аналитические.
1. Вспомним суть графического способа решения уравнений:
   1) построить графики двух функций (левая и правая части уравнения);
   2) найти абсциссы точек пересечения графиков;
   3) записать ответ.

Рассмотрим графический способ решения на примере уравнения $2^x = 4$. Построим графики функций $y = 2^x$, $y = 4$ и найдем абсциссу точки пересечения графиков: $x = 2$.



Ответ: x = 2

Графический способ можно применить не всегда, поэтому рассмотрим более универсальные основные аналитические способы решения показательных уравнений.

2. Аналитические способы:
   1) приравнивание показателей;
   2) вынесение общего множителя за скобки;
   3) введение новой переменной;
   4) использование однородности.
   5) рассмотрим каждый способ подробнее и разберем на примере.

2.1. Приравнивание показателей.

Суть метода:
1) уединить слагаемое, содержащее переменную;
2) привести степени к одному основанию;
3) приравнять показатели;
4) решить полученное уравнение;
5) записать ответ.

Пример:

$3^x - 27 = 0.$

$3^x = 27;$

$3^x = 3^3;$

$x = 3.$

Ответ: x = 3

2.2. Вынесение общего множителя за скобки

Примечание: выносим за скобки множитель с меньшим показателем.

Пример:

$3^x - 3^{x+3} = -78.$

$3^x(1 - 3^3) = -78;$

$3^x(1 - 27) = -78;$

$3^x(-26) = -78;$

$3^x = 3; \quad x = 1.$

Ответ: x = 1

2.3. Введение новой переменной

Как правило, уравнения, решаемые этим способом, сводятся к квадратным.

Пример: $4^{2x} - 5 \cdot 4^x + 4 = 0.$

Пусть 4^x = a тогда уравнение можно записать в виде:

$a^2 - 5a + 4 = 0;$

$D = 25 - 16 = 9;$

$a_1 = \frac{5+3}{2} = 4;$

$a_2 = \frac{5-3}{2} = 1.$

Сделаем обратную замену:
$4^x = 4$ или $4^x = 1$;
$x = 1$ или $x = 0$
Ответ: $x = 1$ или $x = 0$

2.4. Использование однородности

Показательные уравнения вида $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ называются *однородными*.

Суть метода: Так как показательная функция не может принимать значение, равное нулю, и обе части уравнения можно делить на одно и то же не равное нулю число, разделим обе части уравнения, например, на $b^{f(x)}$.

Пример: $2^x = 3^x$

Разделим обе части уравнения на $3^x \neq 0$:

$\frac{2^x}{3^x} = \frac{3^x}{3^x};$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1;$

$x = 0.$

Ответ: $x = 0$

Показательные неравенства

При решении показательных неравенств нужно помнить:

а) неравенство $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$ только в том случаи, если $a > 1$.

б) неравенство $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$ только в том случаи, если $0 < a < 1$.

Пример**:**

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} < 4$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$x - 1 > -2$

$x > -1$

Пример:

$6^x > 36$

$6^x > 6^2$

$x > 2$

При решении более сложных показательных неравенств используют те же способы, что и при решении аналогичных уравнений

Задания

1. Решите уравнения:

1) $4^x=64$

Решение:

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$

Решение:

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$

Решение:

4) $3^{6-x}=3^{3x-2}$

Решение:

5) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$

Решение:

6) $4^{x+1}+4^{x}=320$

Решение:

7) $9^{x}-8\cdot 3^{x}-9=0$

Решение:

8) $36^{x}-4\cdot 6^{x}-12=0$

Решение:

9) $5^{x+2}=20\cdot 4^{x}$

Решение:

№ 2. Решите неравенства:

1) $4^{x}<64$

Решение:

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 27$

Решение:

3) $4^{5-2x} \leq 0{,}25$

Решение:

Занятия № 26
Тема «Логарифмические уравнения»

Задания

1. Дайте понятие логарифма

Ответ:

____
____
____
____
____
____

2. Вычислите:

$\log_2 4 =$

$\log_2 \frac{1}{4} =$

$\log_3 3 =$

$\log_{44} 1 =$

3. Допишите равенство:

$\log_a x + \log_a y =$

$\log_a x - \log_a y =$

$p \log_a x =$

$a^{\log_a x} =$

Какими должны быть числа *a, x, y, p?*

Ответ:

____
____
____

В помощь студенту:

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется *логарифмическим*.

$\log_a x = b$ (где $a > 0, a \neq 1$). Его решение $x = a^b$

Решить логарифмическое уравнение – это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Способы решения логарифмических уравнений

1) Решение логарифмических уравнений на основании определения

Пример: $\log_3(x+4) = 2$

Решение:

$\log_3(x+4)=2$	**ОДЗ:** $x+4>0 \Rightarrow x>-4$
$x+4=3^2$	По определению логарифма (выражение под знаком логарифма переписываем, а основание возводим в степень)
$x+4=9$	Получаем линейное (квадратное) уравнение, решаем его
$x=5$-корень	Сверяем, подходит ли корень, в соответствии с ОДЗ

2)Метод потенцирования: если $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, то $f(x)=g(x)$

Пример: $\log_3(x+6)=\log_3(3-2x)$

Решение:

$\log_3(x+6)=\log_3(3-2x)$	Воспользуемся методом потенцирования (опускаем знаки логарифма)
$x+6=3-2x$	Получаем линейное (квадратное) уравнение
$3x=-3$	Решаем уравнение
$x=-1$	Делаем проверку: полученный корень подставляем в уравнение

3) Логарифмические уравнения, сводящиеся к квадратным, введением новой переменной

Пример: $\lg^2 x-\lg x^2+1=0$

Решение:

$\lg^2 x-\lg x^2+1=0$	Преобразуем в соответствии со свойствами логарифмов
$\lg^2 x-2\cdot\lg x+1=0$	Заменим lgx=t
$t^2-2\cdot t+1=0$	Решаем полученное квадратное уравнение
t=1	Делаем обратную замену
lgx=1	Решаем данное уравнение по определению
$x=10^1 \Rightarrow x=10$	Делаем проверку

Задания

1. Решите уравнения:

1) $9^x=0{,}7$ (воспользуйтесь основным логарифмическим тождеством)

Решение:

____

____

____

____

2) $0{,}3^x=7$

Решение:

____

____

____

____

3) $\log_5 x=2$

Решение:

4) $\log_{0,4} x = -1$

Решение:

5) $\log_{0,5}(2x-4) = -2$

Решение:

6) $\log_a x = 2\log_a 3 + \log_a 5$

Решение:

2. Решить уравнение

ln(3x-5)=0

Решение:

3. Решить уравнение

$\lg(3x^2 + 12x + 19) - \lg(3x + 4) = 1$

Решение:

Занятие № 27

Тема «Логарифмические неравенства»

В помощь студенту

Опр: Неравенство, содержащее переменную под знаком логарифма, называется *логарифмическим*.

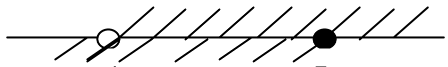
1) Если $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x)$, при a>1 (знак НЕ меняется)
2) Если $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) < g(x)$, при 0<a<1 (ЗНАК МЕНЯЕТСЯ)

Способы решения логарифмических неравенств

1) Решение логарифмических уравнений на основании определения

Пример**:** $\log_3(x+4) \le 2$

Решение:

$\log_3(x+4) \le 2$	ОДЗ: $x+4>0 \Rightarrow x>-4$
$x+4 \le 3^2$	По определению логарифма (выражение под знаком логарифма переписываем, а основание возводим в степень)
$x+4 \le 9$	Получаем линейное (квадратное) неравенство, решаем его
$x \le 5$	В соответствии с ОДЗ, получаем  $x \in (-4;5]$

2) Метод потенцирования: если $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, то $f(x) = g(x)$

Пример: $\log_{0,2}(x-3) < \log_{0,2}(2x-4)$

Решение:

$\log_{0,2}(x-3) < \log_{0,2}(2x-4)$	a=0,2, так как 0<a<1 (ЗНАК МЕНЯЕТСЯ)
$x-3 > 2x-4$	Получаем линейное (квадратное неравенство)
$x-3-2x+4>0$ $-x+1>0$ $-x>-1$ $x<1$	Решаем неравенство (не забудьте, что при умножении на «-» знак неравенства меняется)
$x<1$ (не подходит по ОДЗ) Неравенство решения не имеет	Проверяем, подходит ли полученное значение в соответствии с **ОДЗ:** 1) x-3>0, следует x>3 2) 2x-4>0, следует x>2 Т.о. необходимо, чтобы x>3

3) Логарифмические уравнения, сводящиеся к квадратным, введением новой переменной

Пример: $\lg^2 x - \lg x^2 - 3 < 0$

Решение:

$\log_3^2 x - \log_3 x^2 - 3 < 0$	ОДЗ: x>0 Преобразуем выражение в соответствии со свойствами логарифмов
$\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 < 0$	Заменим $\log_3 x = t$
$t^2 - 2 \cdot t - 3 < 0$	Решаем полученное квадратное неравенство

$-1<t<3$	Делаем обратную замену
$-1<\log_3 x<3$	Решаем данное неравенство по определению
$3^{-1}<x<3^3$ $\frac{1}{3}<x<27$	Полученное неравенство в ходит в область допустимых значений x>0

Задания

1. Решите неравенства:

а) $\log_3 x > 2$

б) $\log_{0,5} x > -2$

в) $\log_4(x-2) \le 2$

Ответ:

2. Решить: $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) > -1$

Ответ:

3. Решите неравенства, методом заменой переменной

$$\log_2^2 x + \log_2 x \leq 6$$

Ответ:

Занятие № 28
Тема «Тригонометрические уравнения»

Вычислите, объясняя каждое действие:

1) $\arcsin 0 =$
2) $\arcsin 1=$
3) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=$
4) $\arccos 1=$
5) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=$
6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$
7) $\mathrm{arctg}\,0=$
8) $arctg\frac{\sqrt{3}}{3}=$
9) $\mathrm{arctg}(-1)=$

В помощь студенту

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком тригонометрических функций.

Простейшими тригонометрическими уравнениями являются уравнения вида: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tgx = a$, $ctgx = a$.

Вид уравнения	**Формулы решений тригонометрических уравнений**	**Частные случаи**
sin*x*=a	Если $\|a\| \le 1$, то **$x=(-1)^n \arcsin a+\pi n,\ n\in Z$**	$\sin x=0,\ x=\pi n,\ n\in Z$ $\sin x=1,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$ $\sin x=-1,\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$
cos*x*=a	Если $\|a\| \le 1$, то **$x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in Z$**	$\cos x=0,\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ $\cos x=1,\ x=2\pi n,\ n\in Z$ $\cos x=-1,\ x=\pi+2\pi n,\ n\in Z$
tg*x*=a	а – любое число **$x=\mathrm{arctg}\,a+\pi n,\ n\in Z$**	——
ctg*x*=a	а – любое число **$x=\mathrm{arcctg}\,a+\pi n,\ n\in Z$**	——

Задания

1. Решить уравнения:

а) $\cos \mathrm{x} = -\frac{1}{2}$

б) $\sin \mathrm{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

в) $3\sin^2 \mathrm{x} - 5\sin \mathrm{x} - 2 = 0$

г) $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$

д) $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\sin x + 1) = 0$

е) $\cos x = -1$

Ответ:

2. Решить

$$2sin^2\frac{x}{2} - 3sin\frac{x}{2} + 1 = 0$$

Ответ:

Занятие № 29

Тема «Тригонометрические неравенства»

В помощь студенту

Тригонометрические неравенства – это неравенства, содержащие тригонометрические функции

При решении тригонометрических неравенств используют свойства неравенств, известные из алгебры, а также различные тригонометрические преобразования и формулы, используется единичный круг.

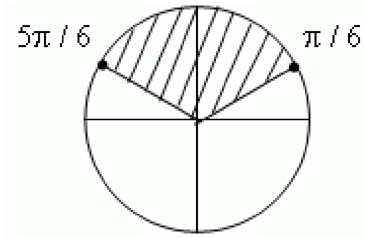
Пример 1: Решить неравенство $\sin x > 0$.

Решение: В пределах одного оборота единичного радиуса это неравенство справедливо при $0 < x < \pi$. Теперь необходимо добавить период синуса $2\pi n$

Пример 2: Решить неравенство $\sin x > 0{,}5$

Решение:

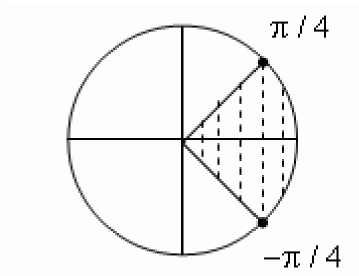
$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$



Пример 3: Решить неравенство $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение:

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$



Задания

Решите неравенства:

а) $\sin t > \frac{1}{2}, t \in [0;\pi]$,

б) $\sin t \le \frac{\sqrt{3}}{2}, t \in [-\pi;0]$

в) $sint > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t \in [0;\pi]$

г) $sint < -\frac{1}{2}$, $t \in [-\pi;0]$

д) $\cos t < -\frac{1}{2}, t \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

е) $tgt > \frac{\sqrt{3}}{3}, t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

ж) $\sin 2x < \frac{1}{2}$,

з) $\cos\frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

и) $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}, t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Решение:

Занятие № 30
Тема «Решение систем уравнений и неравенств»

В помощь студенту

Система уравнений — это условие, состоящее в одновременном выполнении нескольких уравнений относительно нескольких (или одной) переменных.

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ l(x) = k(x) \end{cases}$$

Запись нескольких неравенств под знаком фигурной скобки называется *системой* (число и вид неравенств, входящих в систему, может быть произвольным).

Методы решения системы уравнений

1.Метод подстановки

1) из какого-либо уравнения выразить одну переменную через другую.
2) подставить полученное выражение в другое уравнение и решить его.
3) подставить найденное значение переменной и вычислить значение второй переменной.

2.Метод алгебраического сложения

1) уравнять модули коэффициентов какой-либо переменной и сложить (вычесть) почленно уравнения системы.
2) составить новую систему: одно уравнение новое; другое – одно из старых.
3) решить новое уравнение и найти значение одной переменной.
4) подставить значение найденной переменной в старое уравнение и найти значение другой переменной.

3. Графический метод

1) в каждом уравнении выразить *y* через *x.*
2) построить график каждого уравнения.
3) определить координаты точек пересечения графиков.

Система неравенств - это несколько неравенств с одной переменной.

Решение системы неравенств - это значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство.

Решение системы неравенств есть пересечение решений всех входящих в нее неравенств. Двойное неравенство $f(x) < g(x) < h(x)$ можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ g(x) < h(x). \end{cases}$$

Задания

Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 27^x = 9^y, \\ 81^x = 3^{y+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x + 3y + 6} = 2, \\ \sqrt{2x - y + 2} = 1. \end{cases}$$

Решение:

Занятие № 31

Тема «Решение задач по разделу «Уравнения и неравенства»»

Задания

1. Из перечисленных уравнений определите вид уравнения:

а) $3x+(20-x)=3{,}5$ ________________________________

б) $x^2+2x-7=0$ ________________________________

в) $\frac{x-3}{x+6}=0$ ________________________________

г) $\sqrt{x+3}=0$ ________________________________

д) $|x+2|=12$ ________________________________

е) $2^x16=64$ ________________________________

ж) $\log_2(x+3)=3$ ________________________________

2. Охарактеризуйте каждый из методов решения уравнений

Ответ:

____

____

____

____

____

____

____

____

3. Назовите методы решения систем уравнений и неравенств

Ответ:

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

4. Охарактеризуйте каждый из методов решения системы неравенств

Ответ:

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

5. При каких условиях меняется знак неравенства в показательных и логарифмических неравенствах?

Ответ:

Задания. Решить:

1) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=1$
2) $2\cos x+\sqrt{2}=0$
3) $5^{x+1}+5^{x}+5^{x-1}=31$
4) $\log_{2}(2x-1)=3$
5) $\log_{0.5}(2-x)>-1$
6) $3x+1=\sqrt{1-x}$
7) $\begin{cases}5x+2y=-1\\3x-y=-5\end{cases}$
8) $2\log_{3}2-\log_{3}(x-1)=1+\log_{3}5$

Решение:

РАЗДЕЛ. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Занятия № 33

Тема «Последовательности. Предел последовательности»

В помощь студенту

Назовем *числовой последовательностью* $\{x_n\}$ числовую функцию, заданную на множестве натуральных чисел: $x_n = f(n),\ n \in N$

Ограниченная последовательность: $|x_n| \le M,\ \forall n \in N$

Возрастающая последовательность: $x_n \le x_{n+1}\ \forall\ n \in N$

Последовательность *монотонная*, если она возрастающая или убывающая.

Последовательность, которая имеет предел, называется *сходящейся*,

в обратном случае последовательность *расходится*.

Число а –предел последовательности:

$$\lim_{x\to\infty} x_n = a$$

Свойства сходящихся последовательностей:

1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.
2. Если последовательность сходится, то она ограничена (обратное утверждение не верно).
3. Если последовательность ограничена и монотонна, то она сходится (Теорема Вейерштрасса). (В школьном курсе мы не рассматриваем доказательства свойств и теорем, только формулировки)

Правила вычисления пределов последовательности:

1. $\lim_{n\to\infty} C = C$
2. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim_{n\to\infty} y_n = c$, то
   1) Предел суммы равен суммы пределов:
   $$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + + \lim_{n\to\infty} y_n = b + c$$
   2) Предел произведения равен произведению пределов:
   $$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = b \cdot c$$
   3) Предел частного равен частному пределов:
   $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{b}{c}\,(c \ne 0 \text{ и } y_n \ne 0)$$
   4) Постоянный множитель можно вынести за знак предела:
   $$\lim_{n\to\infty} kx_n = kb\,.$$

   Для любого натурального показателя m и любого коэффициента K справедливо соотношение:
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n^m} = 0$$

Задания

1. Дана последовательность чисел $\{x_n\}$: 2,4,6,8,10,12,… Назовите ее первый, второй, третий, четвертый, пятый и шестой члены.

Ответ:____

____

____

Запишите формулу общего члена последовательности. Найдите x_7, x_8, x_{20}.

Ответ:

____
____
____

2. Последовательность задана формулой n-го члена: $a_n=7n-11$.Докажите, что последовательность является возрастающей и ограниченной снизу.

Ответ:

____
____
____

3. Последовательность задана формулой n-го члена: $a_n=9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Докажите, что последовательность является убывающей и ограниченной сверху.

Ответ:

____
____
____

4. Последовательность зада формулой n-го члена: $a_n=(-2)^n$. Покажите, что она не является монотонной. Является ли она ограниченной?

Ответ:

____
____
____

5. Вычислите сумму: 1+2+3+…+ 98+99+100.

Ответ:

____
____
____

6. Вычислите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

Ответ:

____
____
____

8. Вычислить:

а) $y_n=\frac{2n^2+3}{n^2+4}$. Найти: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$

б) $x_n=\frac{7}{n}+\frac{8}{\sqrt{n}}+\frac{9}{n^3}$. Найти: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

в) $x_n=\frac{1}{2}5^{-n}$. Найти: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Ответ:

Занятие № 34
Тема «Предел функции»

В помощь студенту:

Опр: Число А называется *пределом функции* f(x) при стремлении x к *a* (или в точке *a*). Обозначается: $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = A}$

Правила вычисления пределов

Если существуют lim*f(x)* и lim*g(x)*, то:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

4. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$

Функция y =f(x) называется *непрерывной в точке*, если:
а) она определена в этой точке;
б) существует предел limf(x);
в) этот предел равен значению функции в точке x0 т. е.

$$\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Функция, непрерывная в каждой точке промежутка называется *непрерывной на этом промежутке.*

Свойства непрерывных функций:

1. Сумма, разность, произведение непрерывных в точке функций также непрерывны в этой точке.
2. Частное $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ двух непрерывных в точке функций есть функция, непрерывная в этой точке, если g(x)≠0
3. Если непрерывная на некотором отрезке функция принимает на его концах значения разных знаков, то на этом отрезке найдется, хотя бы одна точка, в которой данная функция обращается в нуль.
Или иначе: если функция на некотором промежутке непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом промежутке сохраняет постоянный знак.

Задания

1.Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 1)$

б) $\lim\limits_{x \to 3} (4x + 5)$

в) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + x)$

г) $\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 + 2x - 7)$

д) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+5}{x-1}$

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-3}{2x+9}$

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{2x^2+9}$

Решение:

2.Исследовать функции на непрерывность:

а) $y=x^2+4x$

б) $y=(x+4)\cdot\frac{1}{x^2-36}$

в) $y=\frac{\sin x}{x^2-5x+6}$

Решение:

Занятие № 35
Тема «Производная функции»

В помощь студенту:

Опр: Производной функции y=f(x) в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ в точке x_0 к приращению аргумента $\Delta x=x-x_0$, когда последнее стремится к нулю.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

производную $f'(x_0)$ можно трактовать как скорость изменения переменной y относительно переменной x в точке x_0.

Опр: Операция производной называется *дифференцированием*.

Опр: Функция, имеющая производную в некоторой точке, называется *дифференцируемой в этой точке.*

Производные простейших элементарных функций

$c'=0$	$(x^n)'=nx^{n-1}$, $\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(a^x)'=a^x\ln a$, в частности $(e^x)'=e^x$	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$ в частности $(\ln x)'=\frac{1}{x}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$
$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

Пример:

$y=x^3$

$y'=3x^2$

Правила дифференцирования

$$(u+v)'=u'+v'$$

$$(u\cdot v)'=u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Пример:

$y=3x^4-3x$

$y'=12x^3-3$

Задания

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=x^{10}$ ____

б) $y=\sqrt{x}$ ____

в) $y=2^x$ ____

г) $y=2\sin x$ ____

д) $y=\frac{1}{x}$ ____

е) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ____

ж) y=lgx ____

з) y= - cosx____

2. Найти производную функции

а) $f(x)=x^2+x^3$

б) $f(x)=\frac{1}{x}+5x-2$

в) $f(x)=x^2+3x-1$

г) $f(x)=x^3(4+2x-x^2)$

д) $f(x)=\sqrt{x}(2x^2-x)$

е) $f(x)=\frac{1+2x}{3-5x}$

ж) $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$

Решение:____

3. Найти $f^{/}(x)=0$

$f(x)=2x^2-x$

4. Найти производную функции y=sinx в точке $x_0=-\frac{\pi}{2}$
Решение:

Занятие № 36
Тема «Производная функции»

Вопросы:

1) Дайте определения производной функции.

Ответ: ____

2) Сформулируйте определение производной функции в точке.

Ответ:____

3) Сформулируйте правила вычисления производных.

Ответ: ____

В помощь студенту:

Производные простейших элементарных функций

$c' = 0$	$(x^n)' = nx^{n-1}$, $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ в частности $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Правила дифференцирования

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Производная сложной функции:

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) f'(x),$$

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) f'(x).$$

Производная обратной функции:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Задания

Найти производную сложной функции

1) $f(x)=(2x+3)^{100}$
2) $h(x)=\cos 3x$
3) $h(x)=\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
4) $f(x)=(3-5x)^5$
5) $g(x)=\sqrt{\cos x}$

6) $g(x) = \frac{1}{(5x+1)^3}$
7) $f(x)=x^3\sin2x$

Решение:

Занятия № 37

Тема «Применение производной»

В помощь студенту:

Геометрический смысл производной

Значение производной функции y=f(x) в точке x=a равно угловому коэффициенту касательной к графику функции y=f(x) в точке x=a.

Уравнение касательной:

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

Физический смысл производной

Понятие производной возникло как математическое описание скорости движения, поэтому важнейшим приложением производной является вычисление скорости.
Если s=s(t) -закон прямолинейного движения, то s'(t)=v скорость движения в момент времени t s''(t) =v'(t)=a – ускорение.

Физический смысл производной состоит в нахождении скорости протекания процесса, описываемого зависимостью y=f(x).

Пример:

Температура тела задана законом $y=x^2+3x-1$. Найти скорость изменения температуры в момент времени 2 с.

Решение:

Исходя из того *s'(t)=v*. Находим y'=2x+3. Далее находим скорость в момент времени 2 с. y(2)=2*2+3=7.

Приближенные вычисления с помощью производной

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

1. **Вопросы***:*

1) Каков геометрический смысл производной?

Ответ: ____

____

2) Каков механический смысл производной?

Ответ: ____

____

3) Какие понятия позволяют сблизить геометрическую и механическую точку зрения на производную?

Ответ: ____

____

4) Чему равен тангенс угла наклона касательной?

Ответ: ____

____

5) Что такое уравнение касательной?

Ответ: ____

____

*2.***Задания**

1) Составьте уравнение касательной:
   а) $f(x)=x^3-2x^2+3$, a=-1
   б) $f(x)=x^4-7x^3+12x-45$, a=0

Решение:

2) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$.

а) Выведите формулу для вычисления скорости движения в любой момент времени t.
б) Найдите скорость в момент времени t=2с (Перемещение измеряется в метрах).
в) Через сколько секунд после начала движения точка остановится?

Решение:

3) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 7t - 2$. Найдите скорость в момент времени равной 5 сек.

Решение:

4) Вычислите с помощью формул приближенного значения:

а) $1{,}002^{100}$,

б) $\sqrt{1{,}004}$,

в) $tg44^0$

Решение:

Занятие № 38
Тема «Исследование функции с помощью производной»

Вопросы:
1) Дайте определение функции.

Ответ:____

____

2) Назовите свойства функции

Ответ:____

____

3) Охарактеризуйте каждое свойство, приведите примеры

Ответ:____

____

В помощь студенту:

Признак возрастания (убывания) функции.

1. Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала, то функция f возрастает на этом интервале.
2. Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала, то функция f убывает на этом интервале.

Критические точки.

Точки, которые получаются при нахождении корней уравнения $f'(x) = 0$.

Точки максимума и минимума.

1. Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x) > 0$ на интервале $(a;x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0;b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.
2. Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x) < 0$ на интервале $(a;x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0;b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции f.

Схема исследования функции

1. Найти производную функции.
2. Приравнять производную к нулю (критические точки)
3. Обозначить эти точки на числовой прямой.
4. Определить возрастания (убывания) функции.
5. Найти точки максимума и минимума.

Задания

1. Исследовать функцию на монотонность

а) $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$

б) $f(x)=-x^2+2x-3$

Решение:____

____

____

____

____

____

2. Найти критические точки функции

а) $f(x)=4-2x+7x^2$
б) $f(x)=1+\cos 2x$

Решение:

3. Найти точки максимума и минимума

а) $f(x)=5+12x-x^3$
б) $f(x)=9+8x^2-x^4$

Решение:

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f:

$f(x)=x^4-8x^2-9$ на [-1;1]

Решение:

Занятие № 39

Тема «Исследование функции с помощью производной»

Вопросы:

Сформулируйте:

1) Необходимое условие возрастания и убывания функции.

Ответ: ____
____

2) Достаточное условие возрастания функции.

Ответ:____
____

3) Достаточное условие убывания функции.

Ответ:____
____

4) Необходимое условие экстремума.

Ответ:____
____

5) Признак максимума функции.

Ответ:____
____

6) Признак минимума функции.

Ответ:____
____

7) Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции.

Ответ:____
____

Помощь студенту:

Признак возрастания (убывания) функции.

1. Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала, то функция f возрастает на этом интервале.
2. Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала, то функция f убывает на этом интервале.

Критические точки.

Точки, которые получаются при нахождении корней уравнения $f'(x) = 0$.

Точки максимума и минимума.

1. Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.
2. Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции f.

Схема исследования функции

1. Найти производную функции.
2. Приравнять производную к нулю (критические точки)
3. Обозначить эти точки на числовой прямой.
4. Определить возрастания (убывания) функции.

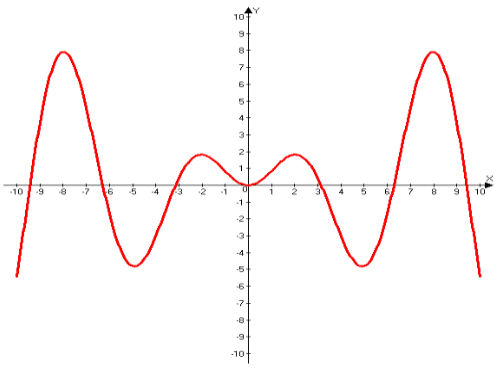
5. Найти точки максимума и минимума.

Задания

1. Заполните таблицу

то y / если	Монотонно убывает	Имеет максимум во внутренней точке	Имеет минимум во внутренней точке	Постоянна	Монотонно возрастает
y′ = -3					
y′ = -3x+5					
y′ = 3x+5					
y′ = 3x²+5					
y′ = 0					

2. По графику производной некоторой функции укажите интервалы, на которых функция монотонно возрастает, убывает, имеет максимум, имеет минимум, имеет перегиб



3. Мини - исследовательская работа в парах

Выбери функцию и исследуй ее

1. $f(x)=(x+1)^3(x-2)$

2. $f(x)=(x+2)^2(x-2)$

3. $f(x)=\dfrac{x^2+5}{2-x}$

4. $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$

5. $f(x)=x^2\sqrt{1-2x}$

6. $f(x)=4x^2\sqrt{1-4x}$

Решение:____
____

4. Докажите, что функция является монотонной на всей области определения

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 2$$

Решение:

5.Найдите промежутки монотонности функции

$$y = \frac{x^2 + x - 4}{x^2}$$

Решение:

6.Определите, имеет ли функция e=f(x) экстремумы. Найдите их

$f(x)=x^4-2x^3+4$

Решение:

Решить самостоятельно

1.Найдите промежутки монотонности функций:

1) $f(x)=-x^2+2x-3$
2) $f(x)=5x^2-3x+1$
3) $f(x)=x^3-27x$

2.Найдите критические точки функции. Определите, какие из них являются точками минимума и максимума:

1) $f(x)=5+12x-x^3$
2) $f(x)=9+8x^2-x^4$
3) $f(x)=(x-2)^3$

3.Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f:

1) $f(x)=x^3+3x^2-9x$ на [-4;0]
2) $f(x)=x^4-2x^2+4$на [2;3]
3) $f(x)=3x^5-5x^3$на [0;2] и [2;3]

Решение:

:

Занятие № 40

Тема «Неопределенный интеграл»

В помощь студенту:

Опр: Процесс интегрирования применяется для нахождения *первообразной*.

Опр: Функция y=F(x) называют *первообразной* функции y=f(x), если для всех x из области определения функции F'(x)=f(x).

Опр: Совокупность первообразных F(x)+C для данной функции f(x) называют неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначают: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Свойства интегралов

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad d\int f(x)dx = f(x)dx$$

$$\int dF(x) = F(x) + C \quad \int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Интегралы некоторых элементарных функций

$\int dx = x + c$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (n≠-1)
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\int e^x dx = e^x + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$

Задания

1. Докажите, что функция F является первообразной для функции f на указанном промежутке:

а) $F(x)=x^5$, $f(x)=5x^4$, $x \in (-\infty;\infty)$

б) $F(x)=x^{-3}$, $f(x)=-3x^{-4}$, $x \in (0;\infty)$

Решение:____

2. Вычислите:

1) $\int 2dx$

2) $\int x^3 dx$

3) $\int 2^x dx$

4) $\int (x^4 + 3x - 2)dx$

5) $\int (x^{\frac{1}{4}} + x - 1)dx$

6) $\int (\sin x - \cos x)dx$

7) $\int 4\sin x dx$

8) $\int -\frac{9}{\cos^2 x} dx$

9) $\int (2 - 9x)^6 dx$

10) $\int (7 + 5x)^{13} dx$

Решение:

Занятие № 41
Тема «Определенный интеграл и его применение»

В помощь студенту:

Интегралы некоторых элементарных функций

$\int dx = x + c$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (n≠-1)
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\int e^x dx = e^x + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$

Определенный интеграл от непрерывной на отрезке [а;в] функции y=f(x) равен приращению первообразной y=F(x) для этой функции на указанном промежутке.

Формула Ньютона – Лейбница: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
5. $\int_a^a f(x)dx = 0$

Площадь криволинейной трапеции: $\boxed{S = \int_a^b f(x)}$

Если $f(x) < 0$, то $S = -\int_a^b f(x)$ (геометрический смысл определенного интеграла)

Пример (схема):

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 4x + 3$, $y = 0$

1. Найдем точки пересечения с осью $0x$:

   $y = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 0$

   $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4$, $\sqrt{D} = 2$

   $x_1 = 3$ $x_2 = 1$

   Получили точки (3;0), (1;0).
2. Найдем точки пересечения с осью $0y$:

   $x = 0$, $y = 3$

   Получили точку (0;3)
3. Найдем вершину параболы:

   $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$,

   $y_0(x_0) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$
4. Строим график
5. $S = -\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx$

Задания:

1. Вычислите интегралы:

а) $\int_{-1}^{2} x^4 dx$

б) $\int_1^3 (x^3 + 1)dx$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

г) $\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx$

Решение:____

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

а) $y=x^2$, $y=0$, $x=3$
б) $y=x^3$, $y=0$, $x=-3$, $x=1$
в) $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$

Решение:

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=4-x^2$, касательной к нему в точке с абсциссой $x=-2$ и прямой $x=2$.

Решение:

Занятие № 42
Тема «Определенный интеграл и его применение»

Задания:

1) Какую фигуру называют криволинейной трапецией?

Ответ:____

2) Запишите формулу для вычисления площади криволинейной трапеции.

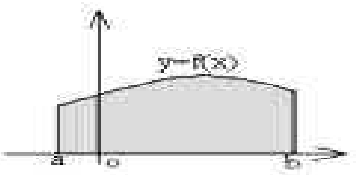
Ответ:____

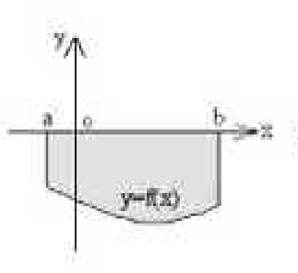
3) Приведите примеры криволинейных трапеций.

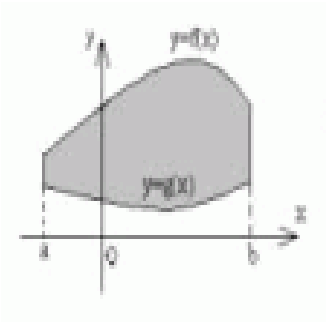
Ответ:____

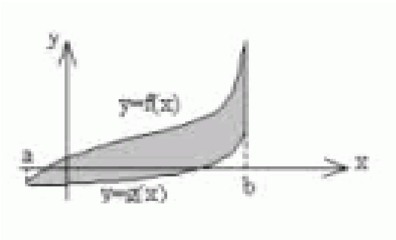
4) Как найти площади изображенных фигур?

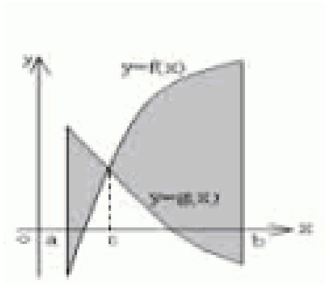
Ответ:____

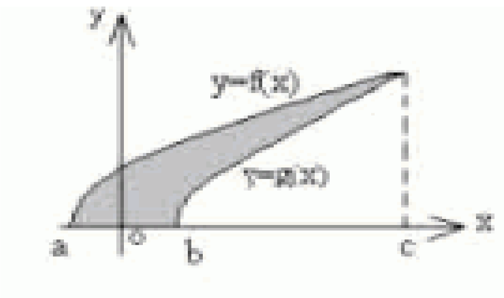


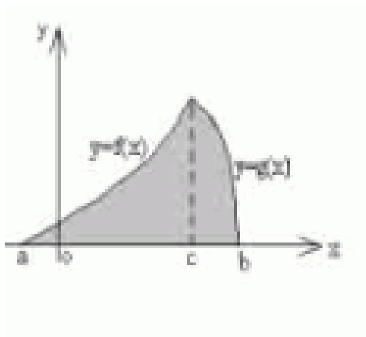












В помощь студенту:

Интегралы некоторых элементарных функций

$\int dx = x + c$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (n≠-1)
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\int e^x dx = e^x + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$

Определенный интеграл от непрерывной на отрезке [a;b] функции y=f(x) равен приращению первообразной y=F(x) для этой функции на указанном промежутке.

Формула Ньютона – Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
5. $\int_a^a f(x)dx = 0$

Площадь криволинейной трапеции: $S = \int_a^b f(x)$

Если $f(x) < 0$, то $S = -\int_a^b f(x)$ (геометрический смысл определенного интеграла)

Пример (схема):

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 4x + 3$, $y = 0$

1. Найдем точки пересечения с осью $0x$:

   $y = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 0$

   $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4$, $\sqrt{D} = 2$

   $x_1 = 3$ $x_2 = 1$

   Получили точки (3;0), (1;0).
2. Найдем точки пересечения с осью $0y$:

   $x = 0$, $y = 3$

   Получили точку (0;3)
3. Найдем вершину параболы:

   $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$,

   $y_0(x_0) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$
4. Строим график
5. $S = -\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx$

Задание. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $y = 1 + \frac{1}{2}\cos x$, y=0, x= $-\frac{\pi}{2}$, x=$\frac{\pi}{2}$
2) $y=x^3+1$, y=0, x=0, x=2
3) $y = \frac{1}{x^2}$, y=0, x=1, x=2
4) $y=-2x-x^2$, y=2x+3.

Решение:____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

Занятие № 43

Тема занятия «Решение задач по разделу «Начала математического анализа»»

Вопросы:

1) Дайте определения производной функции.

Ответ:____

2) Сформулируйте определение производной функции в точке.

Ответ:____

3) Сформулируйте правила вычисления производных.

Ответ:____

4) Сформулируйте схему исследования функции.

Ответ:____

5) Сформулируйте формулу нахождения уравнения касательной.

Ответ:____

6) Какую фигуру называют криволинейной трапецией?

Ответ:____

7) Запишите формулу для вычисления площади криволинейной трапеции.

Ответ:____

8) Приведите примеры криволинейных трапеций.

Ответ:____

Задания:

1. Найти уравнение касательной к функции $y=x-3x^2$ в точке $x_0=2$

Решение:____

2. Найдите производную функции

а) $y=e^x(x^2+1)$

б) $y = \frac{3x+2}{x+1}$

Решение:

3. Вычислите:

а) $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(2x+1)^2}$

б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sin2xdx$

Решение:

4. Найдите промежутки монотонности функции, экстремумы

$y=2x^3-3x^2-12x+1$

Решение:

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-6x+8$, $x=-2$, $x=-1$ и осью абсцисс.

Решение:

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

				Кол-во экземпляров	
№ п/п	**Наименование, вид издания**	**Автор(-ы), составитель(-и), редактор(-ы)**	**Место издания, издательство, год**	**В библиотеке**	**На кафедре**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	Математика : учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования	М. И. Башмаков	М. : Академия, 2015.	100	

Дополнительная литература

№ п/п	**Наименование, вид издания**	**Автор(-ы), составитель(-и), редактор(-ы)**	**Место издания, издательство, год**	**В библиотеке**	**На кафедре**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	Геометрия [Электронный ресурс] : учеб. пособие для СПО. - Режим доступа: https://biblio-online.ru/viewer/6CFDE1DA-A86C-4739-A894-31A048614841/	Н. В. Богомолов	М. : Юрайт , 2018.	ЭБС Юрайт	
2	Математика [Электронный ресурс] : рабочая тетрадь к практ. занятиям по геометрии для обучающихся на базе основного общего образования	сост. И. П. Клобертанц	Красноярск : КрасГМУ, 2018.		
3	Математика [Электронный ресурс] : сб. метод. указаний для обучающихся к практ. занятиям на базе основного общего образования. Ч. 2.	сост. Е. П. Клобертанц, И. П. Клобертанц	Красноярск : КрасГМУ, 2018.		

4	Математика [Электронный ресурс] : сб. метод. указаний для обучающихся к внеаудитор. (самостоят.) работе на базе основного общего образования (1 курс, очная форма обучения). Ч. II.. - Режим доступа: http://krasgmu.vmede.ru/index.php?page[common]=elib&cat=&res_id=54659	сост. Е. П. Клобертанц, И. П. Клобертанц, Л. Ю. Позднякова	Красноярск : КрасГМУ, 2015.	ЭБС КрасГМУ	
6	Математика [Электронный ресурс] : сб. метод. указаний для обучающихся к внеаудитор. (самостоят.) работе на базе основного общего образования (1 курс, очная форма обучения). Ч. I.. - Режим доступа: http://krasgmu.vmede.ru/index.php?page[common]=elib&cat=&res_id=51661	сост. Е. П. Клобертанц, И. П. Клобертанц, Л. Ю. Позднякова	Красноярск : КрасГМУ, 2015.	ЭБС КрасГМУ	
7	Математика [Электронный ресурс] : сб. тестовых заданий с эталонами ответов для студентов 1 курса, обучающихся на базе основного общего образования (очная форма обучения). Ч. I.. - Режим доступа: http://krasgmu.vmede.ru/index.php?page[common]=elib&cat=&res_id=51664	сост. Е. П. Клобертанц, И. П. Клобертанц, Л. Ю. Позднякова	Красноярск : КрасГМУ, 2015.	ЭБС КрасГМУ	
8	Математика [Электронный ресурс] : сб. тестовых заданий с эталонами ответов для студентов 1 курса, обучающихся на базе основного общего образования (очная форма обучения). Ч. II.. - Режим доступа: http://krasgmu.vmede.ru/index.php?page[common]=elib&cat=&res_id=51665	сост. Е. П. Клобертанц, И. П. Клобертанц, Л. Ю. Позднякова	Красноярск : КрасГМУ, 2015.	ЭБС КрасГМУ	
9	Математика. Сборник задач профильной направленности : учеб. пособие для учреждений сред. проф. образования	М. И. Башмаков	М. : Академия, 2014.	100	
10	Математика: алгебра, начала математического анализа, геометрия [Электронный ресурс] : сб. метод. указаний для обучающихся к практ. занятиям на базе основного общего образования. Ч. I.. - Режим доступа:	сост. Е. П. Клобертанц	Красноярск : КрасГМУ, 2016.	ЭБС КрасГМУ	

	http://krasgmu.vmede.ru/index.php?page[common]=elib&cat=&res_id=63709				
11	Математика: алгебра, начала математического анализа, геометрия [Электронный ресурс] : сб. метод. указаний для обучающихся к практ. занятиям на базе основного общего образования. Ч. II.. - Режим доступа: http://krasgmu.vmede.ru/index.php?page[common]=elib&cat=&res_id=63710	сост. Е. П. Клобертанц	Красноярск : КрасГМУ, 2016.	ЭБС КрасГМУ	
12	Математика: алгебра, начала математического анализа, геометрия [Электронный ресурс] : курс лекций для обучающихся на базе основного общего образования. - Режим доступа: http://krasgmu.vmede.ru/index.php?page[common]=elib&cat=&res_id=63711	сост. Е. П. Клобертанц	Красноярск : КрасГМУ, 2016.	ЭБС КрасГМ	

Электронные ресурсы:

ЭБС КрасГМУ «Colibris»
ЭБС Консультант студента ВУЗ
ЭБС Консультант студента Колледж
ЭМБ Консультант врача
ЭБС Айбукс
ЭБС Букап
ЭБС Лань
ЭБС Юрайт
СПС КонсультантПлюс
НЭБ eLibrary